0001883276118999

2014 年 基幹理工・創造理工・先進理工 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 3 次関数 $f(x) = x^3 - ax - b$ について，次の問に答えよ．

(1) $a > 0$ であるとき，$f(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

(2) 次の (i)，(ii)，(iii) を示せ．

(i) $27b^2 - 4a^3 > 0$ のとき，3 次方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

(ii) $27b^2 - 4a^3 = 0$ かつ $a > 0$ のとき，3 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

(iii) $27b^2 - 4a^3 < 0$ のとき，3 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．

(1) $f'(x) = 3x^2 - a$

$a > 0$ のとき. $f'(x) = 0$ となるのは. $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$

$\alpha = -\sqrt{\frac{a}{3}}$, $\beta = \sqrt{\frac{a}{3}}$ とおくと. 増減表は右のようになる.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

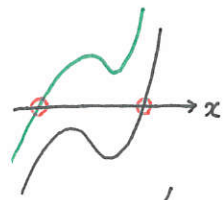
極大　極小

$$\therefore \begin{cases} \text{極大値は. } f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \dfrac{2a\sqrt{3a}}{9} - b \\ \text{極小値は } f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\dfrac{2a\sqrt{3a}}{9} - b \end{cases}$$

(2) (i) $27b^2 - 4a^3 > 0$ のとき.

$a > 0$ のときは (1) より 極大値，極小値をもち，

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = b^2 - \frac{4a^3}{27} = \frac{1}{27}(27b^2 - 4a^3) > 0$$

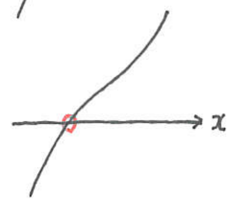


$\therefore$ 極大値と極小値は同符号で，$f(x)$ が 3次関数であることから

$f(x) = 0$ はただ 1つの実数解をもつ

$a \leqq 0$ のときは. $f'(x) \geqq 0$ となり, $f(x)$ は単調増加 (極値をもたない)

$\therefore$ $f(x) = 0$ はただ 1つの実数解をもつ ▨

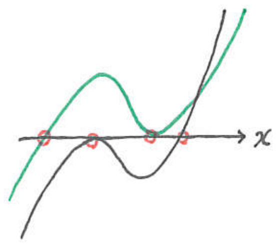


(ii) $27b^2 - 4a^3 = 0$ かつ $a > 0$ のとき. (1) より 極大値と極小値をもち

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{1}{27}(27b^2 - 4a^3) = 0$$

$\therefore$ 極大値と極小値のいずれかは 0 であり，そこで $y = f(x)$ は. x 軸と接する

$\therefore$ $f(x) = 0$ は異なる 2つの実数解をもつ ▨



(iii) $27b^2 - 4a^3 < 0$ のとき. $0 \leqq 27b^2 < 4a^3$ より，$a > 0$

$\therefore$ (1) より. 極大値と極小値をもち，$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{1}{27}(27b^2 - 4a^3) < 0$

$\therefore$ 極大値と極小値は異符号で，$f(x)$ が 3次関数であることから

$f(x) = 0$ は異なる 3つの実数解をもつ ▨