2011 年 第 2 問

$\boxed{2}$ $x > 0$ において関数

$$f(x) = \sin(\log x)$$

を考える．
方程式 $f(x) = 0$ の $0 < x \leqq 1$ における解を大きいほうから順にならべて，

$$1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \cdots$$

とする．以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は e を底とする自然対数とする．なお，不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい．

(1) 不定積分 $I(x)$，$J(x)$ をそれぞれ

$$I(x) = \int e^x \sin x\, dx, \quad J(x) = \int e^x \cos x\, dx$$

とおくとき，$I(x) + J(x)$，$I(x) - J(x)$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\, dx$ を求めよ．

(3) α_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

(4) 区間 $\alpha_{n+1} \leqq x \leqq \alpha_n$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を S_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．S_n を求めよ．

(5) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ．