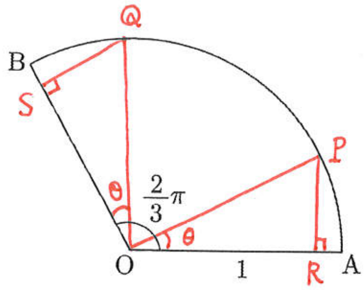
0001874635218999

青山学院大学

2014年 理工A方式 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 下図のように，点Oを中心とし，半径が1で中心角が $\frac{2}{3}\pi$ の扇形OABがある．θ を $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ を満たす角として，弧AB上に，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$，$\angle\mathrm{BOQ}=\theta$ を満たす点P，Qをとる．また，点Pから線分OAに垂線を下ろし，線分OAとの交点をRとする．点Qから線分OBに垂線を下ろし，線分OBとの交点をSとする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 三角形OPRの面積を θ を用いて表せ．

(2) 三角形OPQの面積を θ を用いて表せ．

(3) θ が $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，五角形ORPQSの面積の最大値を求めよ．

(1) $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，$\triangle OPR = \underline{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}$ //

(2) $\triangle OPQ = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$

$\therefore \triangle OPQ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta}$ //

(3) 五角形ORPQSの面積を $S(\theta)$ とおくと (1)，(2) より

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= 2\cdot\triangle OPR + \triangle OPQ \\
&= \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \\
&= \frac{3}{4}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 2\theta\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

最大となるのは，$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき．

$\therefore\ 0<\theta<\frac{\pi}{3}$ より $\frac{\pi}{6} < 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$　$\therefore$ 最大値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\theta = \frac{\pi}{6}\text{ のとき}\right)$ //