



2014年薬学部第2問

2 点 P_0 を xy 平面の原点とし、点 P_1 の座標を $(1, 0)$ とする。点 P_2, P_3, P_4, \dots を次のように定める。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、点 P_{n-1} を中心として点 P_n を反時計回りに θ ($0 < \theta < \pi$) だけ回転させた点を Q_n とし、点 P_{n+1} を $\overrightarrow{P_{n-1}Q_n} = \overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ となるようにとる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left\{ -\sin \left(\frac{2k-1}{2} \theta \right) + \sin \left(\frac{2k+1}{2} \theta \right) \right\}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{2k-1}{2} \theta \right) - \cos \left(\frac{2k+1}{2} \theta \right) \right\}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、

$$1 + \cos \theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin \left(\frac{2n+1}{2} \theta \right) + \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

$$\sin \theta + \dots + \sin n\theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left\{ -\cos \left(\frac{2n+1}{2} \theta \right) + \cos \frac{\theta}{2} \right\}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 点 P_n の座標を (x_n, y_n) とおくと、 x_n および y_n を求めよ。

(4) すべての点 P_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を通る円の方程式を求めよ。