九州工業大学

2016年 情報工学部 第1問　　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s > 0,\ t > 0,\ st < 1)$ を考える．また，$u = st$ とする．点Pを通る曲線 C の2本の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とし，これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ とする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) a，b を s，t を用いて表せ．

(2) 2点 $\mathrm{E}(a,\ 0)$，$\mathrm{F}(b,\ 0)$ を考える．台形ABFEの面積を u を用いて表せ．

(3) △PABの面積を u を用いて表せ．

(4) (3)で求めた△PABの面積を $S(u)$ とする．$S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少することを示せ．

(5) 点Pが2点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ線分上の端点以外にあるものとする．このとき，△PABの面積が最小となる点Pの座標を求めよ．また，そのときの面積を求めよ．

(1) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ より 接点を $\left(v,\ \dfrac{1}{v}\right)$ $(v > 0)$ とおくと 接線は

$$y = -\frac{1}{v^2}(x - v) + \frac{1}{v} \iff y = -\frac{1}{v^2}x + \frac{2}{v} \text{ と表せる}$$

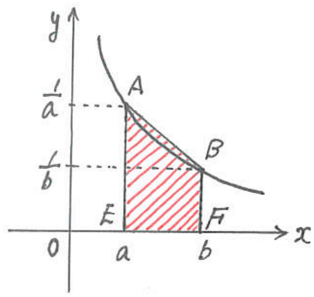
これが $\mathrm{P}(s, t)$ を通ることから．$t = -\dfrac{1}{v^2}s + \dfrac{2}{v}$

∴ v についての方程式 $tv^2 - 2v + s = 0$ を得る．

この解が a, b であるから．

解の公式

$$a = \frac{1 - \sqrt{1 - st}}{t},\quad b = \frac{1 + \sqrt{1 - st}}{t} \text{〃}$$



(2) 台形の面積を T とおくと．

$$T = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\cdot(b - a)$$

$$= \frac{(a+b)(b-a)}{2ab}$$

$a + b = \dfrac{2}{t}$，$b - a = \dfrac{2\sqrt{1-u}}{t}$，$ab = \dfrac{u}{t^2}$ より $T = \dfrac{2\sqrt{1-u}}{u}$ 〃

(3) $\overrightarrow{PA} = \left(a - s,\ \dfrac{1}{a} - t\right)$，$\overrightarrow{PB} = \left(b - s,\ \dfrac{1}{b} - t\right)$ より．

$$\triangle PAB = \frac{1}{2}\left|(a-s)\left(\frac{1}{b} - t\right) - \left(\frac{1}{a} - t\right)(b - s)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{a}{b} - at - \frac{s}{b} + st - \left(\frac{b}{a} - \frac{s}{a} - tb + st\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(a+b)(a-b)}{ab} - t(a-b) - \frac{s(a-b)}{ab}\right|$$

$$= \frac{b-a}{2}\left|\frac{2}{t}\cdot\frac{t^2}{u} - t - s\cdot\frac{t^2}{u}\right|$$

2枚目へつづく

2016年 情報工学部 第1問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0,\ st<1)$ を考える．また，$u=st$ とする．点Pを通る曲線 C の2本の接線をそれぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とし，これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ とする．ただし，$a<b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ を $s,\ t$ を用いて表せ．

(2) 2点 $\mathrm{E}(a,\ 0)$，$\mathrm{F}(b,\ 0)$ を考える．台形ABFEの面積を u を用いて表せ．

(3) △PABの面積を u を用いて表せ．

(4) (3)で求めた△PABの面積を $S(u)$ とする．$S(u)$ は区間 $0<u<1$ で減少することを示せ．

(5) 点Pが2点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ線分上の端点以外にあるものとする．このとき，△PABの面積が最小となる点Pの座標を求めよ．また，そのときの面積を求めよ．

(3) のつづき

$$\triangle PAB = \frac{\sqrt{1-u}}{t}\cdot t\left|\frac{2}{u}-1-1\right|$$

$$= 2\sqrt{1-u}\left|\frac{1-u}{u}\right|$$

$0<u<1$ であるから，$\underline{\triangle PAB = \dfrac{2(1-u)\sqrt{1-u}}{u}}$ //

(4) $S(u)=\dfrac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}$ より，$S'(u)=\dfrac{-3(1-u)^{\frac{1}{2}}\cdot u-2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u^2} = -\dfrac{\sqrt{1-u}\,(u+2)}{u^2}$

$0<u<1$ において，$S'(u)<0$ であるから，

$S(u)$ は $0<u<1$ において減少する ▨

(5) 点Pは $y=-\frac{1}{3}x+1$ $(0<x<3)$ 上にあるから，

$t=-\frac{1}{3}s+1$ $(0<s<3)$ が成り立つ

$\therefore$ $u=st=s\left(-\frac{1}{3}s+1\right)$ より，$u=-\frac{1}{3}\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ $(0<s<3)$

よって，u の動く範囲は，$0<u\leqq\frac{3}{4}$

(4)より $S(u)$ は単調減少であるから，最小値は $S\left(\frac{3}{4}\right)=\dfrac{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{3}$

そのとき，$s=\frac{3}{2}$，$t=\frac{1}{2}$

以上より，$\underline{P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ のとき，最小値 }\frac{1}{3}}$ //