

2013年 環境科学部・工学部 第3問

3 四面体の4つの頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とし、空間のある点 P に関するそれぞれの位置ベクトルを $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ とする。いま $\triangle A_2A_3A_4, \triangle A_1A_3A_4, \triangle A_1A_2A_4, \triangle A_1A_2A_3$ を順に T_1, T_2, T_3, T_4 で表しその重心をそれぞれ G_1, G_2, G_3, G_4 とする。

- (1) 点 H を $\vec{PH} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4}{4}$ を満たす点とすると、4つの直線 A_iG_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は H で交わることを示せ。
- (2) 「直線 A_iH は T_i を含む平面に直交する ($i = 1, 2, 3, 4$)」という条件が成り立つと仮定する。このとき P として H を選べば、 \vec{a}_j と \vec{a}_k の内積 $\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$) の値は $j \neq k$ を満たすどの j, k に対しても同じであることを示せ。
- (3) (2) の条件が成り立てば、四面体 $A_1A_2A_3A_4$ は正四面体であることを示せ。