富山大学

2012年 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{e-1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{4}$$

(1) 不等式の両辺はともに正の値をとるので，逆数をとることで

$$e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \iff e^{x^2} \geqq 1+x^2$$

$\therefore$ $f(x) = e^{x^2} - (1+x^2)$ とおくと，

$f'(x) = 2x(e^{x^2}-1)$

ここで，$f'(x)=0$ となるのは，$x=0$ のとき．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\therefore$ 右の増減表より，$f(x) \geqq 0$ となる．

$\therefore$ $e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立つ ▨

(2) (1)より，

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

置換積分 $x=\tan\theta$ とおく．

$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ ，

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

また，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$x \geqq x^2$ より，$e^{-x} \leqq e^{-x^2}$

$$\therefore \int_0^1 e^{-x^2}\,dx > \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1}+1 = \frac{e-1}{e}$$

以上より，$\dfrac{e-1}{e} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \dfrac{\pi}{4}$ ▨