滋賀大学

2014年第1問

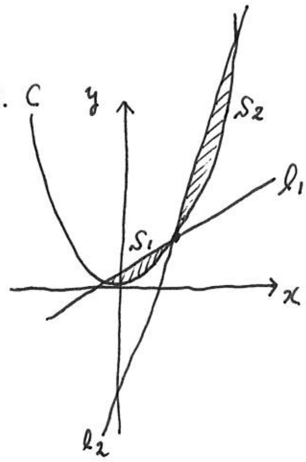
数理 石井K

$\boxed{1}$ mを正の定数とし，放物線$C : y = x^2$上に点P$(a,\ a^2)$をとる．ただし，$\frac{m}{2} < a < m$とする．Pを通り傾きがmの直線をℓ_1，Pを通り傾きが$2m$の直線をℓ_2とするとき，次の問いに答えよ．

(1) Cとℓ_1で囲まれた図形の面積をS_1，Cとℓ_2で囲まれた図形の面積をS_2とする．S_1とS_2をaとmを用いて表せ．

(2) S_1がS_2の8倍となるとき，aをmを用いて表せ．

(3) aを変化させたとき，$S_1 + S_2$の最小値とそのときのaの値をmを用いて表せ．



(1). $\ell_1 : y = m(x-a) + a^2 \quad \therefore y = mx - ma + a^2$

$\ell_2 : y = 2m(x-a) + a^2 \quad \therefore y = 2mx - 2ma + a^2$

∴ Cとℓ_1，Cとℓ_2の交点のx座標をそれぞれ

α_1, β_1 と α_2, β_2 $(\alpha_i < \beta_i)$ とおくと

$$S_1 = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} mx - ma + a^2 - x^2 dx = -\int_{\alpha_1}^{\beta_1} (x-\alpha_1)(x-\beta_1) = \frac{1}{6}(\beta_1 - \alpha_1)^3$$

ここで，解と係数の関係より，$\alpha_1 + \beta_1 = m$，$\alpha_1\beta_1 = ma - a^2$

$$\therefore (\beta_1 - \alpha_1)^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1 = m^2 - 4(ma - a^2) = m^2 + 4a^2 - 4ma$$

∵ $\beta_1 - \alpha_1 > 0$ より．$\beta_1 - \alpha_1 = 2a - m$ $\quad \therefore \underline{S_1 = \frac{1}{6}(2a-m)^3}$ //

同様にして，$\underline{S_2 = \frac{4}{3}(m-a)^3}$ //

(2) (1)より．$\frac{1}{6}(2a-m)^3 = \frac{4}{3} \cdot 8(m-a)^3 \quad \therefore (2a-m)^3 = \{4(m-a)\}^3$

$\therefore 2a - m = 4(m-a) \quad \underline{a = \frac{5}{6}m}$ //

(3) $S(a) = S_1 + S_2$ とおくと．

$$S(a) = \frac{1}{6}\{(2a-m)^3 + 8(m-a)^3\} \quad \therefore S'(a) = m(4a - 3m)$$

∴ 右の増減表より

$S_1 + S_2$の最小値は $\frac{m^3}{24}$ $\left(a = \frac{3}{4}m \text{のとき}\right)$ //

a	$\left(\frac{m}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3}{4}m$	$\cdots$	(m)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	$\frac{m^3}{24}$	↗	

極小