2014 年 環境科学部・工学部 第 4 問

$\boxed{4}$ t は $0 < t < 1$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で 3 つの曲線 $C_1 : y = \sin x$，$C_2 : y = \cos x$，$C_3 : y = t\cos x$ を考える．

(1) y 軸と C_1，C_3 で囲まれる部分の面積 S_1 を t で表せ．

(2) C_1，C_2，C_3 で囲まれる部分の面積を S_2 とおく．$S_1 = S_2$ となる t とそのときの S_1 の値を求めよ．

(1) C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とおくと

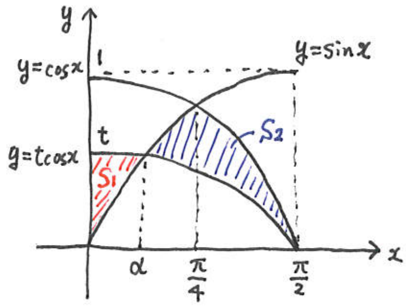
$\sin\alpha = t\cos\alpha$ が成り立つ

よって両辺を 2 乗して計算すると，

$\sin^2\alpha = t^2\cos^2\alpha$

$\therefore\ 1 - \cos^2\alpha = t^2\cos^2\alpha \qquad \therefore\ \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+t^2}$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$



$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^{\alpha} t\cos x - \sin x \, dx \\
&= \Big[t\sin x + \cos x \Big]_0^{\alpha} \\
&= t\sin\alpha + \cos\alpha - 1 \\
&= \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} - 1 \\
&= \underline{\sqrt{t^2+1} - 1} \text{ //}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \sin x - t\cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x - t\cos x \, dx \\
&= \Big[-\cos x - t\sin x \Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} + \Big[\sin x - t\sin x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}} + \cos\alpha + t\sin\alpha + 1 - t - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{1+t^2} + 1 - \sqrt{2} - t
\end{aligned}
$$

$\therefore\ S_1 = S_2$ より $\sqrt{t^2+1} - 1 = \sqrt{t^2+1} + 1 - \sqrt{2} - t$

よって，$\underline{t = 2 - \sqrt{2}}$ //

つづき．

このとき

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sqrt{(2-\sqrt{2})^2 + 1} - 1 \\
&= \underline{\sqrt{7 - 4\sqrt{2}} - 1} \text{ //}
\end{aligned}
$$