滋賀県立大学

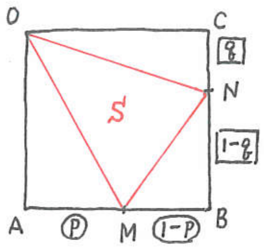
2016年 環境科学部・工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて，ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM，BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする．また，△OMNの面積を S とする．ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ である．

(1) S を p，q を用いて表せ．

(2) $p=\dfrac{1-q}{1+q}$ のとき，S の最小値とそれを与える q の値を求めよ．



(1) $S=$ (正方形OABC) $-\triangle OAM-\triangle NMB-\triangle ONC$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot p-\frac{1}{2}\cdot(1-p)(1-q)-\frac{1}{2}\cdot1\cdot q$$

$$=1-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}(1-p-q+pq)-\frac{q}{2}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}(1-pq)}$$ //

(2) $p=\dfrac{1-q}{1+q}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{q(1-q)}{1+q}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{(1+q)(2-q)-2}{1+q}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(q-1+\frac{2}{q+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(q+1+\frac{2}{q+1}\right)-1$$

$q+1>0$ より，相加・相乗平均の関係を使って

$$(q+1)+\frac{2}{q+1}\geqq2\sqrt{(q+1)\cdot\frac{2}{q+1}}=2\sqrt{2}$$

（等号成立は $q+1=\dfrac{2}{q+1}$ すなわち，$q=\sqrt{2}-1$ のとき）

このとき p は，$p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

$$\therefore S\geqq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-1$$

$\therefore$ S の最小値は $\underline{\sqrt{2}-1\ (p=q=\sqrt{2}-1\ のとき)}$ //