東京海洋大学

2014年 海洋工 第5問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_k=\displaystyle\int_0^{\log 2}(e^x-1)^k\,dx$ とおく．

(1) $0 \leqq x \leqq \log 2$ のとき，$0 \leqq e^x-1 \leqq \dfrac{x}{\log 2}$ が成り立つことを示せ．ただし，$e>2$ であることを用いてよい．

(2) I_k+I_{k+1} を k を用いて表せ．

(3) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}=I_0+(-1)^nI_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ を求めよ．

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\log 2}-(e^x-1)$ とおく

$f'(x)=\dfrac{1}{\log 2}-e^x$

$f'(x)$ は単調減少の関数で $f'(0)=\dfrac{1}{\log 2}-1>0$, $f'(\log 2)=\dfrac{1-\log 4}{\log 2}<0$ ($e>2$ より $1>\log 2$ を使った)

∴ $0 \leqq x \leqq \log 2$ において，ちょうど1つ $f'(x)=0$ となる x が存在するので，それを α とする

$f(0)=f(\log 2)=0$ なので，増減表は右のようになる

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\log 2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって，$0 \leqq x \leqq \log 2$ において，$f(x) \geqq 0$，$e^x \geqq 1$

$y=e^x$ のグラフから分かる．

以上より，$0 \leqq x \leqq \log 2$ において，$0 \leqq e^x-1 \leqq \dfrac{x}{\log 2}$ が成り立つ ▨

(2) $I_k+I_{k+1}=\displaystyle\int_0^{\log 2}(e^x-1)^k\,dx+\int_0^{\log 2}(e^x-1)^{k+1}\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\log 2}e^x(e^x-1)^k\,dx$

$t=e^x-1$ とおいて 置換積分

x	$0 \to \log 2$
t	$0 \to 1$

, $dt=e^x\,dx$

$=\displaystyle\int_0^1 t^k\,dt$

$=\left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{k+1}$ //

(3) (左辺) $=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k+1}$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot(I_k+I_{k+1})$ (∵ (2) より)

(左辺) $=I_0+I_1-I_1-I_2+I_2+I_3-I_3-I_4+\cdots+(-1)^n(I_n+I_{n+1})$

$=I_0+(-1)^nI_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$=$ (右辺) ▨

2枚目につづく

0001838811618999

東京海洋大学

2014年 海洋工 第5問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_k=\displaystyle\int_0^{\log 2}(e^x-1)^k\,dx$ とおく．

(1) $0\leqq x\leqq \log 2$ のとき，$0\leqq e^x-1\leqq \dfrac{x}{\log 2}$ が成り立つことを示せ．ただし，$e>2$ であることを用いてよい．

(2) I_k+I_{k+1} を k を用いて表せ．

(3) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}=I_0+(-1)^nI_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ を求めよ．

(4) (3)より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}=\lim_{n\to\infty} I_0+(-1)^nI_{n+1}\quad\cdots(*)$$

ここで，$I_0=\displaystyle\int_0^{\log 2}dx=\log 2$

(1)より，$0\leqq I_k\leqq \displaystyle\int_0^{\log 2}\left(\frac{x}{\log 2}\right)^k dx=\left[\frac{x^{k+1}}{(\log 2)^k\cdot(k+1)}\right]_0^{\log 2}=\frac{\log 2}{k+1}$

すなわち．$0\leqq I_{n+1}\leqq \dfrac{\log 2}{n+2}$

$n\to\infty$ のとき．$\dfrac{\log 2}{n+2}\to 0$ ∴ はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_{n+1}=0$

以上より (*) は，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}=\underline{\log 2}\ //$$