

2014年海洋工第5問

5 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $I_k = \int_0^{\log 2} (e^x - 1)^k dx$ とおく.

- (1) $0 \leq x \leq \log 2$ のとき, $0 \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{\log 2}$ が成り立つことを示せ. ただし, $e > 2$ であることを用いてよい.
- (2) $I_k + I_{k+1}$ を k を用いて表せ.
- (3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1}$ を求めよ.