

2012年工学部第1問

1 座標平面上の点を，原点のまわりに角 θ だけ回転移動させる一次変換を表す 2 行 2 列の行列を A とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 座標平面上の点 $P_0(a, b)$ が A によって変換された点を点 P_1 とする．2 点 P_0, P_1 の間の長さを求めよ．
- (2) $A^n = E$ となる条件を示せ．ただし， n は 2 以上の整数， $0 \leq \theta \leq \pi$ ， E は単位行列とする．
- (3) 座標平面上の点 $P_0(a, b)$ が A によって l 回変換された点を点 P_l とする．点 P_0 が A によって n 回変換されると，原点の周りを 1 周して元の点 P_0 に戻るとする． n 個の点 P_0, P_1, \dots, P_{n-1} で囲まれた n 角形の面積 S_n を求めよ．また， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いて， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ．
- (4) 座標平面上の点を，原点からの方向を変えずに距離を k 倍する一次変換を表す 2 行 2 列の行列を B とする．座標平面上の点 Q_{i-1} が一次変換 AB によって点 Q_i に移るとする．点 Q_0 を (c_0, d_0) とするとき，2 点 Q_{i-1}, Q_i の間の長さ m_i を k, θ, c_0, d_0 を用いて表せ．