2016年 工学部・生命環境（生命工） 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

**4** $y=e^{-\pi x}\sin(\pi x)$ で定められた曲線を $C$ とする．

(1) $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で $C$ の概形をかけ．ただし，凹凸を調べる必要はない．

(2) $n$ を自然数とする．$C$ の $n-1\leqq x\leqq n$ の部分と $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S_n$ を求めよ．

(3) (2) の $S_n$ について，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の値を求めよ．

(1) $y' = (e^{-\pi x})'\sin(\pi x) + e^{-\pi x}\{\sin(\pi x)\}'$

$= -\pi e^{-\pi x}\sin(\pi x) + \pi e^{-\pi x}\cos(\pi x)$

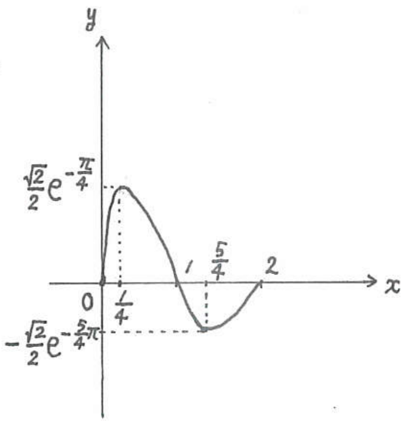
$= -\pi e^{-\pi x}\{\sin(\pi x) - \cos(\pi x)\}$

$= -\sqrt{2}\pi e^{-\pi x}\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$

$e^{-\pi x}>0$ で，$0\leqq \pi x\leqq 2\pi$ より，$y'=0$ となるのは，$x=\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}$

| $x$ | 0 | … | $\frac{1}{4}$ | … | $\frac{5}{4}$ | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | 0 | ↗ | | ↘ | | ↗ | 0 |

∴ 増減表よりグラフは右のようになる．




(2) $n$ が奇数のとき，$n-1\leqq x\leqq n$ において $y\geqq 0$，

$n$ が偶数のとき，$n-1\leqq x\leqq n$ において $y\leqq 0$ であるから

$S_n = \left|\int_{n-1}^{n} e^{-\pi x}\sin(\pi x)\,dx\right|$

ここで，$I_n = \int_{n-1}^{n} e^{-\pi x}\sin(\pi x)\,dx$ とおくと，

$I_n = \int_{n-1}^{n}\left(-\frac{1}{\pi}e^{-\pi x}\right)'\sin(\pi x)\,dx$

$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\Big[e^{-\pi x}\sin(\pi x)\Big]_{n-1}^{n}}_{=0} - \int_{n-1}^{n} -e^{-\pi x}\cos(\pi x)\,dx$

$= -\int_{n-1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}e^{-\pi x}\right)'\cos(\pi x)\,dx$

$= -\frac{1}{\pi}\Big[e^{-\pi x}\cos(\pi x)\Big]_{n-1}^{n} + \int_{n-1}^{n} -e^{-\pi x}\sin(\pi x)\,dx$

$= -\frac{1}{\pi}\left\{e^{-n\pi}\cos(n\pi) - e^{-(n-1)\pi}\cos((n-1)\pi)\right\} - I_n$

$\therefore\ I_n = \frac{1}{2\pi}\left\{e^{-(n-1)\pi}\cos((n-1)\pi) - e^{-n\pi}\cos(n\pi)\right\}$

0002286453177999

山梨大学

2016年 工学部・生命環境（生命工） 第4問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $y = e^{-\pi x}\sin(\pi x)$ で定められた曲線を $C$ とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $C$ の概形をかけ．ただし，凹凸を調べる必要はない．

(2) $n$ を自然数とする．$C$ の $n-1 \leqq x \leqq n$ の部分と $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S_n$ を求めよ．

(3) (2) の $S_n$ について，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の値を求めよ．

(2) のつづき.

$$\therefore S_n = |I_n|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|e^{-(n-1)\pi}\cos((n-1)\pi) - e^{-n\pi}\cos(n\pi)\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{e^{-(n-1)\pi} + e^{-n\pi}\right\}$$

$$= \underline{\frac{e^{\pi}+1}{2\pi e^{n\pi}}}$$ //

(3) $\{S_n\}$ は初項 $\frac{e^{\pi}+1}{2\pi e^{\pi}}$，公比 $\frac{1}{e^{\pi}}$ の等比数列で，$0 < \frac{1}{e^{\pi}} < 1$ より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{e^{\pi}+1}{2\pi e^{\pi}}}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}$$

$$= \underline{\frac{e^{\pi}+1}{2\pi(e^{\pi}-1)}}$$ //