島根大学

2011年 総合理工（数理・情報システム以外）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 3,\ b_1 = \frac{3}{2},\ a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \geqq 1)$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての $n \geqq 1$ に対して $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ が成り立つ α，β の値の組をすべて求めよ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(3) $a_n = 2$ となる自然数 n の存在性を調べよ．

(1) $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ より

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = b_n + \frac{a_n+b_n}{2}\cdot\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\alpha\left(a_n + \frac{\alpha+2}{\alpha}b_n\right)$$

これと $\beta(a_n + \alpha b_n)$ の係数を比べる.

よって. $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ かつ $\alpha = \dfrac{\alpha+2}{\alpha}$

$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ より $(\alpha-2)(\alpha+1) = 0$ $\therefore \alpha = -1, 2$

$\therefore \underline{(\alpha, \beta) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right), (2, 1)}$ //

(2) (1)より. $a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n - b_n)$ …①

$a_{n+1} + 2b_{n+1} = a_n + 2b_n$ …②

①より数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $\frac{3}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore a_n - b_n = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore a_n - b_n = -3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ …③

②より $a_n + 2b_n = a_1 + 2b_1 = 6$ $\quad\therefore a_n + 2b_n = 6$ …④

③×2＋④より. $3a_n = -6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 6$ $\quad\therefore \underline{a_n = 2\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$ //

(3) $a_n = 2 \iff 2\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 2$

$\iff \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ <u>これをみたす自然数 n は存在しない</u> //