2012年 総合理工（数理・情報システム以外） 第2問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ $x>0$ に対して，$f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}\log x$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f_n(x)$ の極値と，極値を与える $x$ の値を求めよ．

(2) (1)で求めた $x$ の値を $a_n$ とするとき，$x \geqq a_n$ の範囲における曲線 $y=f_n(x)$ と直線 $x=a_n$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S_n$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．ただし，必要があれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ne^{-n}=0$ を用いてもよい．

(1) $f_n'(x) = (x^{\frac{1}{n}})'\log x + x^{\frac{1}{n}}(\log x)'$　　$\frac{1}{n}>0$ より $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

$= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\log x + x^{\frac{1}{n}-1}$

$= \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}(\log x + n)$

$\therefore$ $f_n'(x)=0$ となるのは，$x>0$ のとき，$\log x = -n$ すなわち，$x=\underbrace{e^{-n}}_{>0}$ のとき．

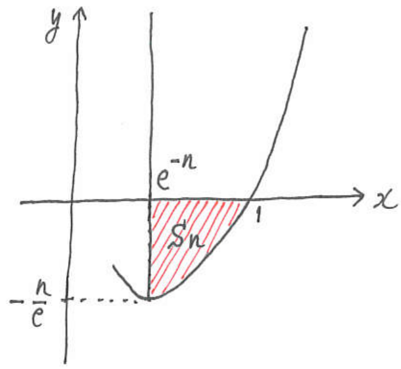
$f_n(e^{-n}) = (e^{-n})^{\frac{1}{n}}\log e^{-n} = -\frac{n}{e}$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^{-n}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f_n(x)$ | | ↘ | $-\frac{n}{e}$ | ↗ |

$\therefore$ 右の増減表より，極値は

極小値 $-\frac{n}{e}$ （$x=e^{-n}$ のとき）//

(2) $a_n = e^{-n}$




$y=f_n(x)$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は，

$x^{\frac{1}{n}}\log x = 0$ より，$x=1$

右図より

$S_n = \int_{a_n}^{1} -x^{\frac{1}{n}}\log x\, dx$

$= -\int_{a_n}^{1}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}\right)'\log x\, dx$

$= -\left[\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}\log x\right]_{e^{-n}}^{1} + \int_{e^{-n}}^{1}\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}}\,dx$

$= -\left(-\frac{n}{n+1}(e^{-n})^{\frac{n+1}{n}}\cdot(-n)\right) + \left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}\right]_{e^{-n}}^{1}$

$= -\frac{n^2}{n+1}e^{-(n+1)} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 e^{-(n+1)}$

2012年 総合理工（数理・情報システム以外）第2問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ $x>0$ に対して，$f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}\log x\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f_n(x)$ の極値と，極値を与える $x$ の値を求めよ．

(2) (1)で求めた $x$ の値を $a_n$ とするとき，$x \geqq a_n$ の範囲における曲線 $y=f_n(x)$ と直線 $x=a_n$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S_n$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．ただし，必要があれば，$\lim_{n\to\infty} ne^{-n}=0$ を用いてもよい．

(2)のつづき．

$$S_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left\{1-e^{-(n+1)}-(n+1)e^{-(n+1)}\right\}$$

$$=\underline{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left\{1-(n+2)e^{-(n+1)}\right\}}\ //$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2}_{\to 1}\left\{1-\frac{1}{e}\cdot\underbrace{ne^{-n}}_{\to 0}-2\underbrace{e^{-(n+1)}}_{\to 0}\right\}$$

$\lim_{n\to\infty} ne^{-n}=0$ を使った

$$=\underline{1}\ //$$