秋田大学

2012年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数 x，y について，

$$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$$

の最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

(2) a を負の実数とする．

$$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$$

を満たす x，y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

(1) 与式を $f(x,y)$ とおくと

$$f(x,y)=4x^2+4(1-3y)x+12y^2-18y+7$$
$$=4\{x^2+(1-3y)x\}+12y^2-18y+7$$
$$=4\left\{x+\frac{1-3y}{2}\right\}^2-(1-3y)^2+12y^2-18y+7$$
$$=4\left(x+\frac{1-3y}{2}\right)^2+3y^2-12y+6$$
$$=4\left(x+\frac{1-3y}{2}\right)^2+3(y-2)^2-6$$

$\therefore$ 最小値をとるのは，$x+\frac{1-3y}{2}=0$ かつ $y=2$ のとき．

$\therefore$ 最小値 -6 $\left(x=\frac{5}{2},\ y=2\text{ のとき}\right)$ //

＊ポイント

x の式とみて平方完成

次に残りの部分を

y の式とみて平方完成

$\square^2+\square^2+\underbrace{(\text{定数})}_{\text{最小値}}$

(2) (i) $y=x+1$ のとき．

$f(x,y)$ に $y=x+1$ を代入したものを $f(x)$ とおくと．

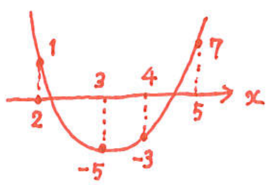
$$f(x)=4x^2+12(x+1)^2-12x(x+1)+4x-18(x+1)+7$$
$$=4x^2-2x+1$$
$$=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$$
$$>0$$

$\therefore$ $f(x,y)=a$ をみたす負の実数 a は存在しない

(ii) $y=x-1$ のとき．

$f(x,y)$ に $y=x-1$ を代入したものを $g(x)$ とおくと．

$$g(x)=4x^2+12(x-1)^2-12x(x-1)+4x-18(x-1)+7$$
$$=4x^2-26x+37$$
$$=4\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{21}{4}$$



$\therefore$ $g(2)=1>0$，$g(3)=-5$，$g(4)=-3$，$g(5)=7>0$

$\therefore$ a の最大値は -3 $(x=4,\ y=3)$ //