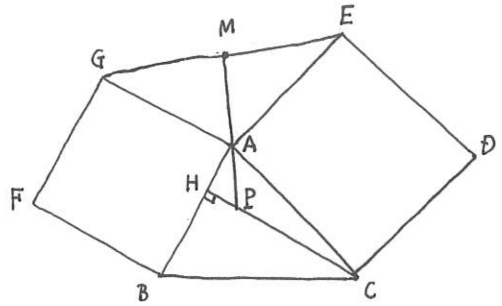
0001905544908999

同志社大学

2014年 文学部・経済学部 第3問　　1枚目／2枚

3 平面上で鋭角三角形 △ABC の外側に，AB および AC を1辺とする正方形 ABFG，ACDE をつくる．ただし，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AG}|$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AE}|$ とする．線分 EG の中点を M，点 C から AB に下ろした垂線の足を H，直線 AM と CH の交点を P とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ とおき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle CAB=\theta$ とする．以下の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を t, θ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{HC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t, θ を用いて表せ．
(3) 直線 AM と直線 BC が直交することを示せ．
(4) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AE}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, t, θ を用いて表せ．
(5) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t, θ を用いて表せ．
(6) $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\underline{t\cos\theta}$ //

(2) $AH=AC\cos\theta$ より $|\overrightarrow{AH}|=t\cos\theta$

$\therefore \overrightarrow{AH}=\dfrac{|\overrightarrow{AH}|}{|\vec{a}|}\vec{a}=t\cos\theta\cdot\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}$

$=\underline{-t\cos\theta\cdot\vec{a}+\vec{b}}$ //

(3) $\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{AG}\parallel\overrightarrow{HC}$

$\therefore \overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{HC}$ と表せる $(k<0)$

$\therefore \overrightarrow{AG}=-kt\cos\theta\cdot\vec{a}+k\vec{b}$

$\therefore |\overrightarrow{AG}|^2=k^2t^2\cos^2\theta+k^2t^2-2k^2t\cos\theta\cdot t\cos\theta$

$=k^2t^2(1-\cos^2\theta)$

$=(kt\sin\theta)^2$

$\therefore |\overrightarrow{AG}|=|\vec{a}|=1$ より．$k=-\dfrac{1}{t\sin\theta}$

$\therefore \overrightarrow{AG}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{a}-\dfrac{1}{t\sin\theta}\vec{b}$ …①

(3) のつづき．

①，② より．$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AE})$

$=\dfrac{\cos\theta-t}{2\sin\theta}\vec{a}+\dfrac{t\cos\theta-1}{2t\sin\theta}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{2\sin\theta}\left\{(\cos\theta-t)\vec{a}+\left(\cos\theta-\dfrac{1}{t}\right)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{2\sin\theta}\left\{t-\cos\theta+t^2\cos\theta-t+\left(\dfrac{1}{t}-t\right)\cdot t\cos\theta\right\}$

$=0$

$\therefore AM\perp BC$ ■

(4) ①，② ですでに求めた

$\underline{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{a}-\dfrac{1}{t\sin\theta}\vec{b}}$ //

$\underline{\overrightarrow{AE}=-\dfrac{t}{\sin\theta}\vec{a}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{b}}$ //

点 B から AC に下ろした垂線の足を I として同様のことをすると．

$\overrightarrow{AE}=-\dfrac{t}{\sin\theta}\vec{a}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{b}$ …②

2014年 文学部・経済学部 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

3 平面上で鋭角三角形△ABCの外側に，ABおよびACを1辺とする正方形ABFG，ACDEをつくる．ただし，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AG}|$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AE}|$とする．線分EGの中点をM，点CからABに下ろした垂線の足をH，直線AMとCHの交点をPとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$とおき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle CAB=\theta$とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$を$t$，$\theta$を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{HC}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，t，θを用いて表せ．
(3) 直線AMと直線BCが直交することを示せ．
(4) $\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AE}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，t，θを用いて表せ．
(5) $\overrightarrow{AP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，t，θを用いて表せ．
(6) $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}$を求めよ．

(5) HP : PC = s : 1−s (0<s<1) とおくと

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AH}+s\vec{b}$$

$$=(1-s)t\cos\theta\cdot\vec{a}+s\vec{b}\quad\cdots③$$

一方3点 M, A, P は同一直線上にあるので

$\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{AM}$ と表せる

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{\cos\theta-t}{2\sin\theta}\cdot u\vec{a}+\frac{t\cos\theta-1}{2t\sin\theta}\cdot u\vec{b}\quad\cdots④$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立なので③, ④より

$$\begin{cases}(1-s)t\cos\theta=\dfrac{\cos\theta-t}{2\sin\theta}\cdot u\\ s=\dfrac{t\cos\theta-1}{2t\sin\theta}\cdot u\end{cases}$$

これを解くと，$s=\dfrac{\cos\theta(1-t\cos\theta)}{t\sin^2\theta}$

③に代入して，

$$\underline{\overrightarrow{AP}=\frac{(t-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\vec{a}+\frac{(1-t\cos\theta)\cos\theta}{t\sin^2\theta}\vec{b}}\ //$$

(6)

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AP}-\vec{a})\cdot\vec{b}$$

$$=\left\{\frac{t\cos\theta-1}{\sin^2\theta}\vec{a}+\frac{(1-t\cos\theta)\cos\theta}{t\sin^2\theta}\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{t\cos\theta-1}{\sin^2\theta}\cdot t\cos\theta+\frac{(1-t\cos\theta)\cos\theta}{t\sin^2\theta}\cdot t^2$$

$$=\frac{t^2\cos^2\theta-t\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{t\cos\theta-t^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\underline{0}\ //$$