

2016年 医学部 第3問

3 命題P「 a ($0 \leq a \leq 2\pi$)を定数としたとき、方程式 $x = \sin(x + a)$ はただ1つの実数解をもつ」が真であるとき、方程式 $x = \sin(x + a)$ の解 x を $f(a)$ で表わす。以下の問いに答えよ。

- (1) 命題Pが真であることを示せ。
- (2) $n = 0, 1, 2$ について、 $f(n\pi)$ の値を求めよ。
- (3) $0 < x < 2\pi$ のとき、 $\cos(x + f(x)) < 1$ であることを示せ。
- (4) 次の各問いに答えよ。ただし、関数 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続、 $0 < x < 2\pi$ で微分可能であると仮定してよい。
 - (i) 関数 $\theta(x) = x + f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ において増加することを示せ。
 - (ii) 関数 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の増減、グラフの凹凸を調べ、最大値と最小値を求めよ。
 - (iii) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (5) 導関数の定義と $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用することにより、関数 $f(x)$ が $0 < x < 2\pi$ において微分可能であることを示せ。ただし、 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続であると仮定してよい。