0002230549677999

公立はこだて未来大学

2016年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ が以下の漸化式をみたすとする.

$$a_1=-4,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また, 実数 x の多項式 $P_n(x)$ を

$$P_n(x)=a_1x+\cdots+a_nx^n$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

特性方程式
$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}$
$\therefore\ \alpha=3$

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
(2) $P_n(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ.
(3) $P_n(x)$ を $x-4$ で割ったときの余りが -24 になるように, n の値を定めよ.

(1) $a_{n+1}-3=\frac{1}{2}(a_n-3)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n-3\}$ は初項 $a_1-3=-7$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ a_n-3=-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 　　 $\therefore\ \underline{a_n=3-\frac{7}{2^{n-1}}}$ //

(2) 剰余の定理より, 余りは $P_n(1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ P_n(1)&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(3-\frac{7}{2^{k-1}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}3-7\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\&=3n-7\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\&=\underline{3n+\frac{7}{2^{n-1}}-14}\ //\end{aligned}$$

(3) 余りは,

$$\begin{aligned}P_n(4)&=a_1\cdot4+a_2\cdot4^2+\cdots+a_n\cdot4^n\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(3-\frac{7}{2^{k-1}}\right)\cdot4^k\\&=3\sum_{k=1}^{n}4^k-7\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\\&=3\cdot\frac{4(1-4^n)}{1-4}-7\cdot\frac{4(1-2^n)}{1-2}\\&=2^{2n+2}-7\cdot2^{n+2}+24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P_n(4)=-24 &\iff 4\cdot(2^n)^2-28\cdot2^n+48=0\\&\iff (2^n-3)(2^n-4)=0\end{aligned}$$

n: 整数より, $\underline{n=2}$ //