



2016年工・理・教育第4問

4  $n$ を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1)  $\alpha, \beta$ を実数とし、

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta}$$

とする。  $f(x)$  の第  $n$  次導関数  $f^{(n)}(x)$  について、次の等式が成り立つことを、数学的帰納法によって証明しなさい。

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\}$$

(2)  $b, c$  を  $b^2 > 4c$  を満たす実数とし、

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - bx + c}$$

とする。また、  $h(x)$  の第  $n$  次導関数  $h^{(n)}(x)$  に対し、  $a_n = \frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$  とおく。

(i) 2次方程式  $x^2 - bx + c = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とする。  $a_n$  を  $\alpha, \beta, n$  を用いて表しなさい。

(ii)  $a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n = 0$  が成り立つことを示しなさい。