



2015年 第4問

数理  
石井K4 次の問いに答えよ。ただし、 $a$ は正の実数で $a \neq 1$ とする。

- (1)  $a^x = e^{f(x)}$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。  
 (2) 不定積分 $\int a^x dx$ を求めよ。  
 (3)  $3^{1-x}(1+|y|) \leq 3$ をみたす実数の組 $(x, y)$ の範囲を $xy$ 平面上に図示せよ。  
 (4) (3)で図示された範囲の面積を求めよ。

(1) 両辺、対数をとって、 $f(x) = x \log a$  //(2) (1)より、 $\int a^x dx = \int e^{f(x)} dx$ 

$$\begin{aligned} \text{ここで、} f(x) = \log a \text{ より、} \int a^x dx &= \frac{1}{\log a} \int f'(x) e^{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{\log a} \cdot e^{f(x)} + C \\ &= \frac{a^x}{\log a} + C \quad (C \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

(3) (i)  $x \leq 1$  のとき、

$$3^{1-x}(1+|y|) \leq 3$$

$$\therefore 3^{-x}(1+|y|) \leq 1$$

$$\therefore |y| \leq 3^x - 1$$

$$\therefore 1 - 3^x \leq y \leq 3^x - 1$$

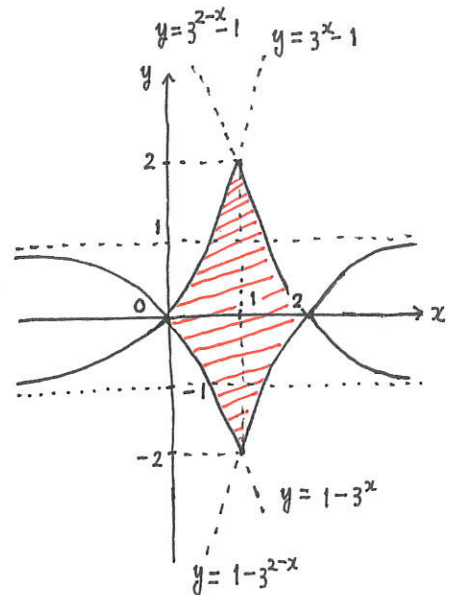
(ii)  $x > 1$  のとき、

$$3^{x-1}(1+|y|) \leq 3$$

$$\therefore 1+|y| \leq 3^{2-x}$$

$$\therefore 1 - 3^{2-x} \leq y \leq 3^{2-x} - 1$$

(i), (ii)より、右の図の斜線部分(境界線も含む)



(4) 図形の対称性より、

$$S = 4 \int_0^1 (3^x - 1) dx = 4 \left[ \frac{3^x}{\log 3} - x \right]_0^1 = \frac{8}{\log 3} - 4 //$$

(2)より