明治大学

2016年 情報コミュニケーション学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 1辺の長さが2の正四面体OABCがある．線分ABを $p:(1-p)$ $(0<p<1)$ に内分する点をD，線分OCを $q:(1-q)$ $(0<q<1)$ に内分する点をEとする．また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

(1) $\overrightarrow{DE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，p，q を用いて表し，次の空欄 $\boxed{タ}$ ～ $\boxed{ツ}$ に p，q を用いた値や式を記せ．

$$\overrightarrow{DE}=(\overset{p-1}{\boxed{タ}})\vec{a}+(\overset{-p}{\boxed{チ}})\vec{b}+(\overset{q}{\boxed{ツ}})\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

(1) $\overrightarrow{OD}=(1-p)\vec{a}+p\vec{b}$, $\overrightarrow{OE}=q\vec{c}$

$\therefore \underline{\overrightarrow{DE}=(p-1)\vec{a}+(-p)\vec{b}+q\vec{c}}$ 〃

(2) $|\overrightarrow{DE}|^2$ を求める過程を記した次の文章の空欄 $\boxed{テ}$ ～ $\boxed{ト}$ に適切な値や式を記せ．

△OAB，△OBC，△OCAは，いずれも1辺の長さが2の正三角形だから，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2 \quad \cdots\cdots ②$$

かつ，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\overset{2}{\boxed{テ}} \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③より，$|\overrightarrow{DE}|^2$ は p，q を用いて次のように表せる．

$$|\overrightarrow{DE}|^2=4(\underset{p^2+q^2-p-q+1}{\boxed{ト}}) \quad \cdots\cdots ④$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ$

$=\underline{2}$ 〃

(1)より．$|\overrightarrow{DE}|^2=(p-1)^2|\vec{a}|^2+p^2|\vec{b}|^2+q^2|\vec{c}|^2$

$-2p(p-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+2q(p-1)\vec{c}\cdot\vec{a}$

$-2pq\,\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=4(p-1)^2+4p^2+4q^2$

$-4p(p-1)+4q(p-1)-4pq$

$=\underline{4(p^2+q^2-p-q+1)}$ 〃

(3) 点D，点EがそれぞれAB，OC上を動くとき，$|\overrightarrow{DE}|$ の最小値を求める過程を記した次の文章の空欄 $\boxed{ナ}$ ～ $\boxed{ネ}$ に適切な値や式を記せ．

④は次のように変形できる．

$$|\overrightarrow{DE}|^2=4\left\{\left(p-\overset{\frac{1}{2}}{\boxed{ナ}}\right)^2+\left(q-\overset{\frac{1}{2}}{\boxed{ニ}}\right)^2+\overset{\frac{1}{2}}{\boxed{ヌ}}\right\} \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤より，$|\overrightarrow{DE}|$ は $p=\underset{\frac{1}{2}}{\boxed{ナ}}$，$q=\underset{\frac{1}{2}}{\boxed{ニ}}$ のとき最小値 $\underset{\sqrt{2}}{\boxed{ネ}}$ をとる．

(3) $|\overrightarrow{DE}|^2=\underline{4\left\{(p-\frac{1}{2})^2+(q-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\right\}}$ 〃

∴ 最小値をとるのは．$\underline{p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}}$ 〃 のときで．

そのとき．最小値は $\sqrt{4\cdot\frac{1}{2}}=\underline{\sqrt{2}}$ 〃