0001853276418999

岐阜薬科大学

2014 年 薬学部 第 6 問

数理 石井K

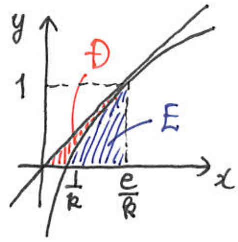
$\boxed{6}$ 曲線 $y=\log(kx)$ を C とする．曲線 C，原点 O を通る曲線 C の接線 ℓ，x 軸とで囲まれた図形を D とするとき，次の問いに答えよ．ただし，k は正の定数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_x を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_y を求めよ．

(4) $V_x=V_y$ となる k の値を求めよ．



(1) $y'=\frac{k}{kx}=\frac{1}{x}$ ∴接点を $(s, \log(ks))$ とおくと 接線は $y=\frac{1}{s}(x-s)+\log(ks)$

これが原点を通ることから，$0=\log(ks)-1$ ∴ $s=\frac{e}{k}$ ∴ $y=\frac{k}{e}x$ //

(2) 右上図の D+E の領域を回転させると，底面の半径 1，高さ $\frac{e}{k}$ の円すいになる．
それから E を回転させたものを引く．

$$\therefore V_x=\pi\cdot 1^2\cdot\frac{e}{k}\times\frac{1}{3}-\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{e}{k}}\pi(\log(kx))^2dx$$

$$=\frac{e\pi}{3k}-\left[\pi\{\log(kx)\}^2\cdot x\right]_{\frac{1}{k}}^{\frac{e}{k}}+\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{e}{k}}\pi\cdot 2\log(kx)\cdot dx$$

$$=\frac{e\pi}{3k}-\frac{e\pi}{k}+\left[2\pi x\log(kx)\right]_{\frac{1}{k}}^{\frac{e}{k}}-\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{e}{k}}2\pi\cdot dx$$

$$=\frac{2\pi(3-e)}{3k}$$ //

(3) $e^y=kx$ より．$x=\frac{e^y}{k}$

$$\therefore V_y=\pi\int_0^1\left(\frac{e^y}{k}\right)^2dy-\pi\cdot\left(\frac{e}{k}\right)^2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\pi}{k^2}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1-\frac{\pi e^2}{3k^2}$$

$$=\frac{\pi(e^2-3)}{6k^2}$$ //

(4) (2)，(3) より．$\frac{2\pi(3-e)}{3k}=\frac{\pi(e^2-3)}{6k^2}$ ∴ $k=\frac{e^2-3}{12-4e}$ //