0001865904318999

広島市立大学

2014年 第3問

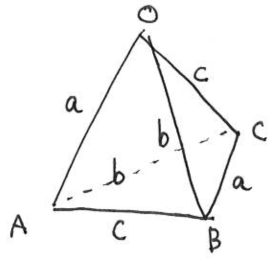
数理 石井K

$\boxed{3}$ 四面体OABCは，OA = BC，OB = AC，OC = ABを満たしているとし，OA $= a$，OB $= b$，OC $= c$ とおく．三角形ABCと三角形OACの重心をそれぞれG，Hとするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{BH}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を a，b，c を用いて表せ．

(3) OG ⊥ BH であるとき，$a^2+c^2=3b^2$ が成り立つことを示せ．



(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ //

同様に $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ //

(2) ∠AOB $= \theta$ とおくと，余弦定理より $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = a\cdot b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$ //

(3) (2)と同様に $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$\therefore$ (1)より $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$= \frac{1}{9}\Big\{|\overrightarrow{OA}|^2 - 3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - 3|\overrightarrow{OB}|^2 + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$+ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2\Big\}$

$= \frac{1}{9}\Big\{a^2 - 2\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} + 2\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2} - 2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} - 3b^2 + c^2\Big\}$

$= \frac{2}{9}(a^2-3b^2+c^2)$

$\therefore$ OG ⊥ BH より $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$ なので $a^2-3b^2+c^2=0$

$\therefore a^2+c^2=3b^2$ ▨