# 島根大学

2015年 医学部 第3問



$\boxed{3}$ $f(x) = xe^x$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし $e$ は自然対数の底とし，$2 < e < 3$，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ であることは用いてよい．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減およびグラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = -1$，$x = 1$ および $x$ 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ．

(3) $t$ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(t)a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．$t \leqq \frac{1}{2}$ ならば，$\{a_n\}$ は収束することを示せ．

(1) $f'(x) = e^x + xe^x$

$= (x+1)e^x$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1$

$f''(x) = e^x + (x+1)e^x$

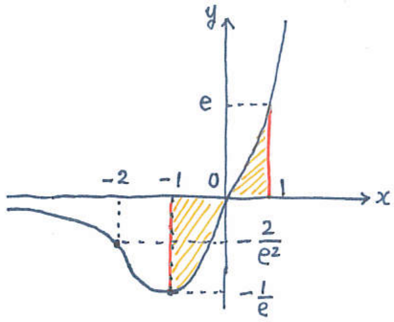
$= (x+2)e^x$

$\therefore$ $f''(x) = 0$ となるのは $x = -2$

| $x$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $(0)$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{e^2}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$，$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to\infty} -te^{-t} = 0$

より増減表は上のようになる




(2)

$$S = \int_{-1}^{0} -xe^x\,dx + \int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} x(e^x)'\,dx + \int_0^1 x(e^x)'\,dx$$

$$= -\left[xe^x\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x\,dx + \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= \underline{2 - \frac{2}{e}} \,/\!/$$

メモ
$\alpha = f(t)\alpha + 1$
$\therefore \alpha = \frac{1}{1-f(t)}$

(3) $t \leqq \frac{1}{2}$ のとき．(1)より，$-\frac{1}{e} \leqq f(t) \leqq \frac{\sqrt{e}}{2}$　$\therefore 0 \leqq |f(t)| < 1$ …①

$\therefore$ $a_{n+1} - \frac{1}{1-f(t)} = f(t)\left(a_n - \frac{1}{1-f(t)}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{a_n - \frac{1}{1-f(t)}\right\}$ は初項 $-\frac{f(t)}{1-f(t)}$，公比 $f(t)$ の等比数列

$\therefore$ $a_n = -\frac{\{f(t)\}^n}{1-f(t)} + \frac{1}{1-f(t)}$　①より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\{f(t)\}^n}{1-f(t)} = \frac{1}{1-f(t)}$ に収束する ▨