島根大学

2015年 教育・生物資源科学部 第2問

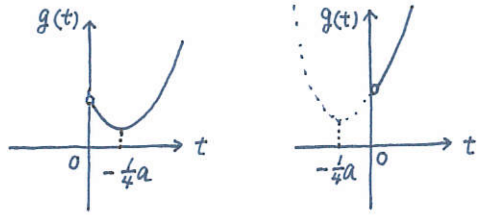
$\boxed{2}$ aを実数とし，関数 $f(x)=4^x+a\cdot 2^{x-1}+a$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値が -2 となるとき，a の値を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(1) $t=2^x\ (>0)$ とおいて $f(x)$ を t で表したものを $g(t)$ とすると，

$$g(t)=t^2+\frac{1}{2}at+a$$
$$=\left(t+\frac{1}{4}a\right)^2-\frac{1}{16}a^2+a$$



(i) $a<0$ のとき　(ii) $a>0$ のとき．

$a=0$ は条件をみたさないので右の2つの場合に分けられる．$a>0$ は最小値をもたず不適

$\therefore\ a<0$ かつ $-\frac{1}{16}a^2+a=-2$

$\therefore\ a^2-16a-32=0$　$\therefore\ a=8\pm4\sqrt{6}$　$a<0$ より．$\underline{a=8-4\sqrt{6}}$ //

(2) (1) の $g(t)$ を考える．

$f(x)=0$ が実数解をもつ $\iff$ $g(t)=0$ が正の実数解をもつ

(1)の2つの場合を考える．($a=0$ は，(2)でも条件をみたさない)

(i) $a<0$ のとき．

$g(t)=0$ の判別式を D とおくと．$D\geqq0$ となればよい

$\therefore\ D=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-4a\geqq0$　$\therefore\ a(a-16)\geqq0$　$\therefore\ a<0$ より．$a-16<0$　$\therefore\ a<16$

これと場合分けの条件より，$a<0$

(ii) $a>0$ のとき．

$g(0)<0$ となればよい

$\therefore\ g(0)=a<0$ これは $a>0$ に反して矛盾．

(i)，(ii) より．$\underline{a<0}$ //