島根大学

2010年 総合理工（数理・情報システム以外）第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 3次式 $x^3-7x^2+15x+b$ を1次式 $x-a$ で割ったときの商が $f(x)$ で，余りが5であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) $a>0$ で，放物線 $y=f(x)$ の頂点が直線 $y=x-a$ の上にあるとき，$f(x)$ を求めよ．

(1) 因数定理より，$P(x)=x^3-7x^2+15x+b$ とおくと，

$P(a)=5$

よって，$a^3-7a^2+15a+b=5$

$\therefore\ \underline{b=-a^3+7a^2-15a+5}$ //

(2) $P(x)=(x-a)f(x)+5 \iff x^3-7x^2+15x-a^3+7a^2-15a=(x-a)f(x)$

$\iff (x-a)(x^2+ax+a^2)-7(x-a)(x+a)+15(x-a)=(x-a)f(x)$

$\iff (x-a)\{x^2+(a-7)x+a^2-7a+15\}=(x-a)f(x)$

これが x についての恒等式より

$f(x)=x^2+(a-7)x+a^2-7a+15$

$=\left(x+\frac{a-7}{2}\right)^2-\left(\frac{a-7}{2}\right)^2+a^2-7a+15$

$=\left(x+\frac{a-7}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{7}{2}a+\frac{11}{4}$

$\therefore$ 頂点は $\left(-\frac{a-7}{2},\ \frac{3}{4}a^2-\frac{7}{2}a+\frac{11}{4}\right)$

これが $y=x-a$ 上にあるから

$\frac{3}{4}a^2-\frac{7}{2}a+\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}a+\frac{7}{2}-a$

$\begin{array}{ccc} 3 & & +1 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{array}$

$\therefore\ \frac{3}{4}a^2-2a-\frac{3}{4}=0$

$3a^2-8a-3=0$

$(3a+1)(a-3)=0$

$a>0$ より，$a=3$ 　$\therefore\ \underline{f(x)=x^2-4x+3}$ //