2014年 総合理工（数理・情報システム）第1問

$\boxed{1}$ 3つの箱 X，Y，Z と3つの玉 a，b，c があり，1つの箱には1つの玉が入るとする．箱 X には a が，箱 Y には b が，箱 Z には c が入っている状態から始めて，次の操作を繰り返し行う．

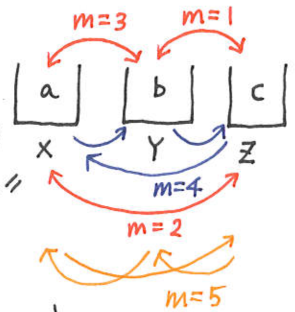
「数字1，2，3，4，5の中から無作為に1つの数字 m を選ぶ．$m=1$ ならば，箱 Y，Z にある玉をそれぞれ箱 Z，Y に移す．$m=2$ ならば，箱 X，Z にある玉をそれぞれ箱 Z，X に移す．$m=3$ ならば，箱 X，Y にある玉をそれぞれ箱 Y，X に移す．$m=4$ ならば，箱 X，Y，Z にある玉をそれぞれ箱 Y，Z，X に移す．$m=5$ ならば，箱 X，Y，Z にある玉をそれぞれ箱 Z，X，Y に移す．」

この操作を n 回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を p_n とする．箱 X，Y，Z にそれぞれ玉 x，y，z が入っている状態を $(x,\ y,\ z)$ と表す．たとえば，最初の状態は $(a,\ b,\ c)$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ，p_1，p_2 を求めよ．

(2) n 回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態 $(a,\ b,\ c)$ となっていない確率を q_n とする．$n \geqq 1$ のとき，$p_{n+1} = \dfrac{1}{5} q_n$ が成り立つことを示せ．

(3) p_n を求めよ．



(1) (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (c, a, b), (b, c, a) //

よって. $p_1 = 0$ //

$1 \leqq m \leqq 3$ のときは同じ操作を2回すれば元の (a, b, c) に戻る．

$m=4$ と $m=5$ なら．互いに1回ずつで元に戻るので． $p_2 = \dfrac{1}{5}$ //

(2) 玉の入れ方は．全部で $3! = 6$ 通りあり．(a, b, c) 以外のものは (1) で求めたものであり．それぞれ．1回の操作で (a, b, c) に戻すことができる．また戻す操作はちょうど1つの操作のみなので． $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} q_n$ $(n \geqq 1)$ ▨

(3) $q_n = 1 - p_n$ より．

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}(1 - p_n)$$

$\therefore p_{n+1} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{6}\right)$ $\quad \therefore \left\{p_n - \dfrac{1}{6}\right\}$ は初項 $-\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列

$\therefore p_n - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{6} \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ $\quad \therefore p_n = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ //