島根大学

2014年 教育・生物資源科学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, b は $a < b$ をみたす実数とする．放物線 $C : y = x^2$ 上の2点 $A(a,\ a^2)$，$B(b,\ b^2)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

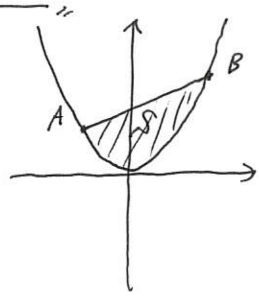
(1) 直線ABの方程式を a と b を用いて表せ．

(2) 放物線 C と直線ABで囲まれた図形の面積 S を a と b を用いて表せ．

(3) $a < t < b$ の範囲で点 $P(t,\ t^2)$ が動くとき，放物線 C と直線APで囲まれた図形の面積を $S_1(t)$，放物線 C と2直線AB，APで囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．このとき，等式 $S_2(t) = 7S_1(t)$ をみたす t を a と b を用いて表せ．

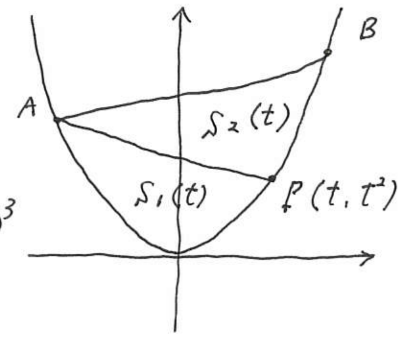
(1) AB : $y = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)+a^2$ $\qquad \therefore \underline{y=(a+b)x-ab}$ //

(2)



$$S = \int_a^b (a+b)x - ab - x^2\,dx$$
$$= -\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$
$$= \underline{\frac{1}{6}(b-a)^3} \text{ //}$$

(3) (2)より



$S_1(t) = \dfrac{1}{6}(t-a)^3$, $\quad S_2(t) = S - S_1(t)$
$$= \frac{1}{6}(b-a)^3 - \frac{1}{6}(t-a)^3$$

$\therefore S_2(t) = 7S_1(t)$ に代入して，

$$\frac{7}{6}(t-a)^3 = \frac{1}{6}(b-a)^3 - \frac{1}{6}(t-a)^3$$
$$\therefore \frac{8}{6}(t-a)^3 = \frac{1}{6}(b-a)^3$$
$$\therefore \{2(t-a)\}^3 = (b-a)^3$$

$t > a$, $b > a$ より． $2t - 2a = b - a$

$$\therefore 2t = a + b$$
$$\therefore \underline{t = \frac{a+b}{2}} \text{ //}$$