0001869720318999

島根大学

2013 年 教育・生物資源科学部 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 3 次関数 $f(x)$ は $x=1$ と $x=3$ で極値をとり，曲線 $y=f(x)$ は点 $(0,\ 1)$ と点 $(1,\ 3)$ を通るとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ に接し，原点 $(0,\ 0)$ を通る直線の本数を求めよ．

(1) $x=1,3$ で極値をとることから，$f'(x)=a(x-1)(x-3)$ と表せる．（a は実数の定数）

$f'(x)=ax^2-4ax+3a$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+3ax+c$ （c は実数の定数）

$y=f(x)$ が $(0,1)$，$(1,3)$ を通ることより，

$1=c\ \cdots①$

$3=\frac{1}{3}a-2a+3a+c$

$\therefore\ \frac{4}{3}a+c=3\ \cdots②$

①，② より，$a=\frac{3}{2}$，$c=1$　$\therefore\ \underline{f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1}$ //

(2) $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}$ より，接線は

$$y=\left(\frac{3}{2}t^2-6t+\frac{9}{2}\right)(x-t)+\frac{1}{2}t^3-3t^2+\frac{9}{2}t+1$$

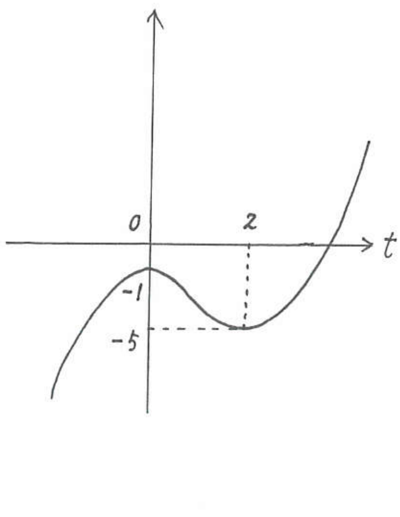
$\therefore\ \underline{y=\left(\frac{3}{2}t^2-6t+\frac{9}{2}\right)x-t^3+3t^2+1}$ //

(3) (2) で求めた接線が原点を通るとき，

$t^3-3t^2-1=0$

$g(t)=t^3-3t^2-1$ とおくと，$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	-1	↘	-5	↗



よって，右のグラフより $g(t)=0$ の実数解は 1 個．

したがって，接点 $(t,\ f(t))$ は 1 個存在するので

原点を通る接線は $\underline{1\text{本}}$ //