0002277182277999

島根大学

2016年 総合理工（数理・情報システム）第3問

数理 石井K

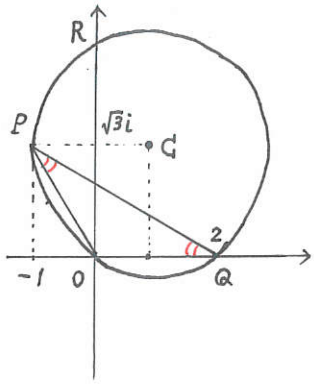
$\boxed{3}$ 複素数平面上に点O(0)，P($-1+\sqrt{3}i$)，Q(2)と，これら3点を通る円Cがある．ただし，iは虚数単位とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 複素数 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ．ただし，偏角θの範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) ∠OPQの大きさを求めよ．

(3) 円Cと虚軸との交点のうち，Oでない点をRとする．Rを表す複素数を求めよ．

(4) 円Cの中心を表す複素数をcとする．点zが円C上を動くとき，複素数 $w=\dfrac{z-1}{z-c}$ がえがく図形を図示せよ．



(1) $-1+\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \underline{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$ //

(2) (1)より $\angle POQ = \frac{2}{3}\pi$

また，△POQ は OP = OQ の二等辺三角形 より

$\angle OPQ = \angle OQP$

よって，$\underline{\angle OPQ = \frac{\pi}{6}}$ //

(3) 弧OQ（短い方）に対する円周角より，$\angle OPQ = \angle ORQ = \frac{\pi}{6}$

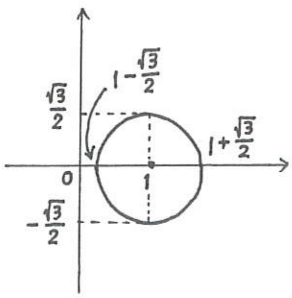
また，$\angle ROQ = \frac{\pi}{2}$　∴ $OR = 2\sqrt{3}$ であるから

Rを表す複素数は，$\underline{2\sqrt{3}\,i}$ //

(4) C(c) とすると，円周角と中心角の関係より $\angle OCQ = \frac{\pi}{3}$

また，OC = CQ（半径）より，△COQ は正三角形で1辺の長さは2（∵ OQ = 2 より）

$\angle COQ = \frac{\pi}{3}$ より，$c = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}i$



$w = \dfrac{z-1}{z-c} \iff wz - wc = z-1$

$\iff z\cdot(w-1) = wc-1$

$\iff z = \dfrac{wc-1}{w-1}$　（∵ $w \neq 1$）

$\iff z - c = \dfrac{c-1}{w-1}$

ここで，$|z-c| = 2$ より，$\left|\dfrac{c-1}{w-1}\right| = 2$　∴ $|w-1| = \frac{1}{2}|c-1|$　∴ $|w-1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，wがえがく図形は中心 1，半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円であり，右上図のようになる．