0002277362277999

島根大学

2016 年 総合理工（数理・情報システム）第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．xy 平面上の曲線 $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}+\dfrac{y^2}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分を $C(\alpha)$ とし，曲線 $C(\alpha)$ と y 軸，および直線 $y=x$ で囲まれた図形を $D(\alpha)$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $C(\alpha)$ と直線 $y=x$ の交点の座標を求めよ．

(2) 図形 $D(\alpha)$ の面積 $S(\alpha)$ を求めよ．

(3) 図形 $D(\alpha)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(\alpha)$ を求めよ．

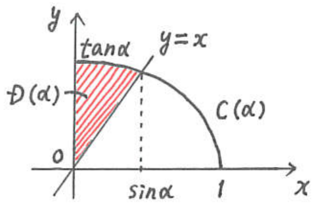
(4) (2)，(3) で求めた $S(\alpha)$，$V(\alpha)$ に対して，$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^3}$ を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}+\dfrac{x^2}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha} \iff x^2=\sin^2\alpha$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\alpha>0$ で，$x \geqq 0$ なので $x=\sin\alpha$　∴ 交点は $\underline{(\sin\alpha, \sin\alpha)}$ //

(2) $C(\alpha)$ はだ円の一部であり，

$C(\alpha)$: $y=\tan\alpha\sqrt{1-x^2}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ であるから



$$S(\alpha)=\int_0^{\sin\alpha}\tan\alpha\sqrt{1-x^2}-x\,dx$$

$$=\tan\alpha\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$x=\sin t$ として置換積分

$dx=\cos t\,dt$，$\begin{array}{c|c} x & 0\to\sin\alpha \\ \hline t & 0\to\alpha \end{array}$

$$=\tan\alpha\int_0^{\alpha}\cos^2 t\,dt-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=\tan\alpha\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\alpha}-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\alpha\tan\alpha}\ //$$

(3) $$V(\alpha)=\pi\int_0^{\sin\alpha}\left(\tan\alpha\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha$$

円すい部分を引いた

$$=\pi\tan^2\alpha\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sin\alpha}-\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha$$

$$=\underline{\frac{2\sin^3\alpha}{3\cos^2\alpha}\pi}\ //$$

(4) $$\lim_{\alpha\to+0}\frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^3}=\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{4\sin^6\alpha}{9\cos^4\alpha}\pi^2\times\frac{8\cos^3\alpha}{\alpha^3\sin^3\alpha}\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{32}{9}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos\alpha}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^3}_{\to 1}\pi^2$$

$$=\underline{\frac{32}{9}\pi^2}\ //$$