



2013年 総合理工 (数理・情報システム以外) 第1問

数理
石井K

1 次の問いに答えよ。

(1) 異なる2点 $(-3, -3)$, (a, b) を通る直線の方程式を求めよ。ただし, a, b は実数とする。(2) 媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = -\sin^2 t \end{cases}$ で表される曲線の概形をかけ。(3) 関数 $f(t) = \frac{-\sin^2 t + 3}{2 \cos t + 3}$ の最大値および最小値を求めよ。

(1) (i) $a \neq -3$ のとき. $y = \frac{b+3}{a+3}(x+3) - 3 \quad \therefore y = \frac{b+3}{a+3}x + \frac{3(b-a)}{a+3}$

(ii) $a = -3$ のとき. $x = -3$

(i), (ii) より $\begin{cases} y = \frac{b+3}{a+3}x + \frac{3(b-a)}{a+3} & (a \neq -3 \text{ のとき}) \\ x = -3 & (a = -3 \text{ のとき}) \end{cases}$ //

(2) $\cos t = \frac{x}{2}$, $\sin^2 t = -y$ を $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (-y) = 1 \quad \therefore y = \frac{x^2}{4} - 1$$

また, $-1 \leq \cos t \leq 1$, $0 \leq \sin^2 t \leq 1$ より. $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 0$

よって, 曲線は右のようになる。

(3) $f(t)$ は 2点 $(2 \cos t, -\sin^2 t)$, $(-3, -3)$ を通る直線の傾きを表しているから, 右下図より。 $f(t)$ が最大となるのは, $(-2, 0)$ と $(-3, -3)$ を通るので

(1) より, 傾きは, 3

 $f(t)$ が最小となるのは, (2) の曲線に接するときなので接点を $(s, \frac{s^2}{4} - 1)$ (ただし, $-2 \leq s \leq 2$) とおくと。 $y' = \frac{x}{2}$ より, 接線は, $y = \frac{s}{2}(x-s) + \frac{s^2}{4} - 1$ すなわち, $y = \frac{s}{2}x - \frac{s^2}{4} - 1$ これが $(-3, -3)$ を通るから

$$-3 = -\frac{3}{2}s - \frac{s^2}{4} - 1 \quad \therefore s^2 + 6s - 8 = 0$$

$$-2 \leq s \leq 2 \text{ より, } s = \sqrt{7} - 3 \text{ 傾きは } \frac{\sqrt{7}-3}{2}$$

以上より 最大値 3, 最小値 $\frac{\sqrt{7}-3}{2}$ //