0000220729779999

島根大学

2011 年 総合理工（数理・情報システム） 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 半径 1 の球を O_1 とし，球 O_1 に内接する立方体を B_1 とする．次に立方体 B_1 に内接する球を O_2 とし，球 O_2 に内接する立方体を B_2 とする．以下この操作を繰り返してできる球を O_n，立方体を B_n ($n = 3, 4, \cdots$) とする．このとき，次の問いに答えよ．

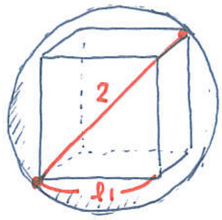
(1) 立方体 B_1 の 1 辺の長さ l_1 を求めよ．

(2) 球 O_n の半径 r_n を n を用いて表せ．

(3) 球 O_n の体積を V_n とし，$S_k = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ とするとき，$\lim_{k\to\infty} S_k$ を求めよ．

(1) B_1 の対角線の長さは $\sqrt{3}\,l_1$ であり，

これが O_1 の直径 2 に等しいから，$\sqrt{3}\,l_1 = 2$ $\quad \therefore\ l_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ //



(2) (1) で求めた l_1 が円 O_2 の直径 $2r_2$ に等しいので

$2r_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \therefore\ r_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$r_1 = 1$ であり，以降これをくり返すと，$r_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$，$r_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$，$\cdots$

となる．∴ 数列 $\{r_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の等比数列

$\therefore\ r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$ //

(3) $V_n = \frac{4\pi}{3} r_n^3$

∴ (2) より，$V_n = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{3n-3}$

$$\therefore\ S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^k}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{k-1}}{3\sqrt{3} - 1}$$

∴ $k \to \infty$ のとき，$\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{k-1} \to 0$ なので，$\lim_{k\to\infty} S_k = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 1}$

$$= \frac{2(9+\sqrt{3})}{13}\pi$$ //