

2016年教育・生物資源科学部 第2問

数理
石井K

2 座標空間に原点Oと点A(2√3, 0, 2), B(√3, 2√3, 1)がある。次の問いに答えよ。

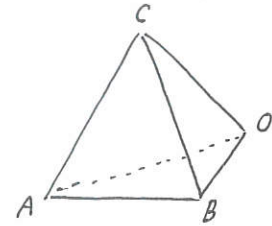
- (1) 三角形OABは正三角形であることを示せ。
 (2) 四面体OABCが正四面体となるような点Cの座標を求めよ。

$$(1) OA = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2 + 2^2} = 4,$$

$$OB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 1^2} = 4,$$

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (0-2\sqrt{3})^2 + (2-1)^2} = 4$$

よって、 $OA = OB = AB$ であり、 $\triangle OAB$ は正三角形である。 ▣



(2) $C(x, y, z)$ とおくと。

$$OC = AC = BC = 4 \text{ より,}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \cdots \textcircled{1}$$

$$(x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16 \cdots \textcircled{2}$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 + (z - 1)^2 = 16 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } -4\sqrt{3}x - 4z = -16 \quad \therefore \sqrt{3}x + z = 4 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ より, } -2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}y - 2z = -16 \quad \therefore \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + z = 8 \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} - \textcircled{4} \text{ より, } 2\sqrt{3}y = 4 \quad \therefore y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{4} \text{ より, } z = 4 - \sqrt{3}x \quad \text{これと } y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して}$$

$$x^2 + \frac{4}{3} + (4 - \sqrt{3}x)^2 = 16$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{3}x + \frac{1}{3} = 0 \quad \therefore x = \frac{3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{よって } \textcircled{4} \text{ より, } z = 4 - \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3} \quad \therefore z = 1 \mp 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって, } C\left(\frac{3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 \mp 2\sqrt{2}\right) \quad (\text{複号同順}) //$$