2010 年 第 1 問

数理 石井K

1 曲線 $C: y=-x^2-1$ を考える．

(1) t が実数全体を動くとき，曲線 C 上の点 $(t,\ -t^2-1)$ を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

(2) D を (1) で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を ℓ とする．D と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ．

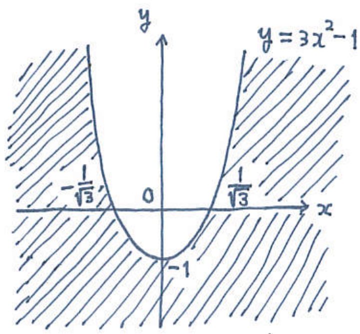
(1) $y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1 \iff \frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}xt-\frac{3}{4}x^2+y+1=0 \quad \cdots (*)$

$(*)$ を t に関する方程式とみて，判別式を D とすると，

$D=\left(\frac{3}{2}x\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}x^2+y+1\right) \geqq 0$

$\therefore y \leqq 3x^2-1$

∴右のグラフの斜線部分（ただし，境界線を含む）



(2) (1) より，$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ で，接点は $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{4}{3}\right)$

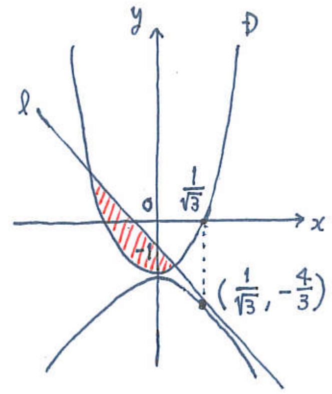
C において，$y'=-2x$ より，

$\ell: y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{4}{3} \quad \therefore \ell: y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}$

ℓ と D の交点を求めると，

$3x^2-1-\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore 3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0 \quad \therefore x=\frac{\sqrt{3}}{9},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$



∴求める面積を S とおくと，

$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{9}} -3x^2+1-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\,dx$

$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{9}} -3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)dx$

$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$ ← $\frac{1}{6}$ 公式を使った

$=\frac{32}{243}\sqrt{3}$ //

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$