2013年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 円Oに内接する四角形ABCDにおいて，対角線ACとBDの交点をEとする．

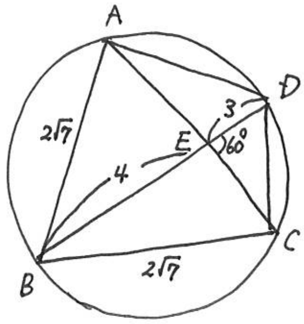
$$AB = BC = 2\sqrt{7}, \quad BE = 4, \quad DE = 3, \quad \angle DEC = 60^\circ$$

であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分AE，ECの長さを求めよ．

(2) 辺CD，DAの長さを求めよ．

(3) 円Oの半径Rを求めよ．



(1) 余弦定理より．$(2\sqrt{7})^2 = 4^2 + AE^2 - 2\cdot 4\cdot AE\cdot\cos 60^\circ$

$\therefore AE^2 - 4AE - 12 = 0 \qquad \therefore (AE-6)(AE+2) = 0 \qquad AE>0$ より $\underline{AE = 6}$ //

同様に余弦定理より．$(2\sqrt{7})^2 = 4^2 + EC^2 - 2\cdot 4\cdot EC\cdot\cos 120^\circ$

$EC^2 + 4EC - 12 = 0 \qquad \therefore (EC+6)(EC-2) = 0 \qquad EC>0$ より $\underline{EC = 2}$ //

(2) 余弦定理より，$CD^2 = 3^2 + EC^2 - 2\cdot 3\cdot EC\cdot\cos 60^\circ$

(1)の結果より $EC = 2$ を代入して．$CD^2 = 7 \qquad CD>0$ より $\underline{CD = \sqrt{7}}$ //

同様に余弦定理より $DA^2 = 3^2 + AE^2 - 2\cdot 3\cdot AE\cdot\cos 120^\circ$

(1)の結果より $AE = 6$ を代入して．$DA^2 = 63 \qquad DA>0$ より $\underline{DA = 3\sqrt{7}}$ //

(3) $\triangle ABC$において (1)より $AC = AE + EC = 8$

$\therefore$ 余弦定理より．$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$

$$\therefore \cos\angle ABC = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \sin\angle ABC = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$\therefore$ 正弦定理より．$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \qquad \therefore R = \dfrac{8}{2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}}$

$$\therefore R = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{3}} \ //$$