東京女子大学

2014年 現代教養 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ mを自然数とするとき，以下を証明せよ．

(1) m^3-mはつねに6で割り切れる．

(2) m^3-mが4で割り切れるための必要十分条件は，mを4で割った余りが2でないことである．

(1) $m^3-m=(m-1)m(m+1)$

右辺は m が自然数であることから，連続する3つの整数の積となる．

よって，$m-1$，m，$m+1$ のうち 少なくとも1つは 2の倍数があり，

1つは 3の倍数である．よって，その積は，2の倍数かつ 3の倍数となり，

6の倍数となる　∴ m^3-m はつねに 6で割り切れる ▨

(2) (1)の議論より，

m^3-m が4で割り切れるのは，

(i) $m-1$，m，$m+1$ のうち 1つが 4の倍数

(ii) $m-1$ と $m+1$ がともに 2の倍数

のときである．

(i)のときは，$m-1=4n$ または，$m=4n$ または $m+1=4n$ (n：整数)

と表されるので，$m=4n-1$，$4n$，$4n+1$ の形であればよい．

したがって (i) $\Leftrightarrow$ mを4で割った余りは，0，1，3 のいずれか

(ii) のときは，連続する2つの偶数 $m-1$，$m+1$ のうちどちらかは，

4の倍数であるから (i)の場合分けに含まれる

(i)，(ii) より，m^3-m が4で割り切れるための必要十分条件は，

mを4で割った余りが2でないことである ▨