信州大学

2015年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおくと，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束し，その和は $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$ であることが知られている．これを用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ．