

2013年 第3問

3  $a$  を  $a > 2$  を満たす実数とし,

$$f(t) = \frac{\sin^2 at + t^2}{at \sin at}, \quad g(t) = \frac{\sin^2 at - t^2}{at \sin at} \quad \left(0 < |t| < \frac{\pi}{2a}\right)$$

とする. また,  $C$  を曲線  $x^2 - y^2 = \frac{4}{a^2} \left(x \geq \frac{2}{a}\right)$  とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $(f(t), g(t))$  は, 曲線  $C$  上の点であることを示せ.
- (2) 点  $\left(\lim_{t \rightarrow 0} f(t), \lim_{t \rightarrow 0} g(t)\right)$  における曲線  $C$  の法線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線  $C$  と (2) で求めた法線および  $x$  軸とで囲まれた部分を,  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V(a)$  とする.  $V(a)$  を  $a$  を用いて表せ. また,  $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$  を求めよ.