2012年 第3問　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $g(x)=xf(x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の定義域を求めよ．

(2) $g(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $2x-x^2 \geqq 0$ より，

$x(2-x)\geqq 0$

よって，$f(x)$ の定義域は，$\underline{0\leqq x\leqq 2}$ //

(2) $g'(x)=(x)'f(x)+xf'(x)$

$$=\sqrt{2x-x^2}+x\cdot\frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x(3-2x)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

よって，$g(x)$ の定義域は $0\leqq x\leqq 2$ で，その範囲で $g'(x)=0$ となるのは，$x=0,\ \frac{3}{2}$

x	0	…	$\frac{3}{2}$	…	2
$g'(x)$	0	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

∴ 右の増減表より，

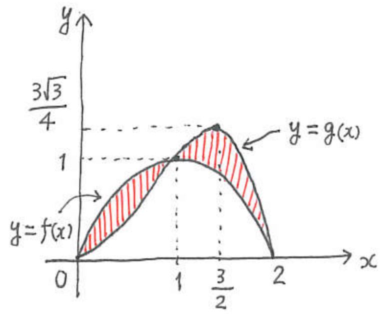
$\underline{\text{最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4}\ (x=\frac{3}{2}\text{ のとき})，\text{最小値 } 0\ (x=0,2\text{ のとき})}$ //

(3) $y=f(x)$ のとき，$y=\sqrt{2x-x^2}$

∴ $y^2=2x-x^2$　∴ $(x-1)^2+y^2=1$

∴ $y=f(x)$ は $(1,0)$ を中心とする半径1の円のうち $y\geqq 0$ をみたす部分である．

∴ 右のグラフより，



$$S=\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)-f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1(1-x)\sqrt{2x-x^2}\,dx+\int_1^2(x-1)\sqrt{2x-x^2}\,dx$$

x	$1\to 2$
t	$1\to 0$

$t=2x-x^2$ とおいて置換積分する．$dt=(2-2x)dx$

x	$0\to 1$
t	$0\to 1$

2012年 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $g(x)=xf(x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の定義域を求めよ．

(2) $g(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) のつづき．

$$S=\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt+\int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{2}{3}}$$ //