0001978541208999

岡山大学

2015年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える．

(1) 曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ．ただし，$a_n>0$ とする．

(2) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする．また，(1) で求めた a_n に対して，$0\leqq x\leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$，x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする．B_n および C_n を n の式で表せ．

(3) (2) で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい．

(1) $f_n'(x)=(n+1)x^n(1-x)+x^{n+1}\cdot(-1)$

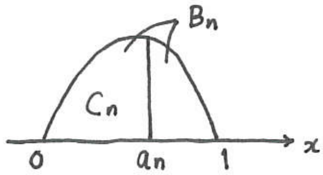
$\quad = x^n\{(n+1)(1-x)-x\}$

$\therefore$ $(a_n,\ f_n(a_n))$ における接線は，$y=a_n^n\{(n+1)(1-a_n)-a_n\}(x-a_n)+a_n^{n+1}(1-a_n)$

これが原点を通ることより，$0=-a_n^{n+1}\{(n+1)(1-a_n)-a_n\}+a_n^{n+1}(1-a_n)$

ここで両辺を $a_n^{n+1}(>0)$ で割ると，$-(n+1)(1-a_n)+a_n+1-a_n=0$

$\therefore\ \underline{a_n=\dfrac{n}{n+1}}$ //



(2) $0<x<1$ において，$f_n(x)>0$ で，$f_n(0)=f_n(1)=0$ より
グラフは右のようになり，

$B_n=\int_0^1 x^{n+1}-x^{n+2}\,dx$

$=\left[\dfrac{x^{n+2}}{n+2}-\dfrac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$

$=\underline{\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}}$ //

$C_n=\int_0^{a_n} x^{n+1}-x^{n+2}\,dx$

$=\left[\dfrac{x^{n+2}}{n+2}-\dfrac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^{a_n}$

$=\dfrac{a_n^{n+2}}{n+2}-\dfrac{a_n^{n+3}}{n+3}$

$=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\left\{\dfrac{(n+1)(n+3)-n(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$

$=\underline{\dfrac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}}$ //

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})^3}$

$=\underline{\dfrac{2}{e}}$ //