公立はこだて未来大学

2014 年 第 6 問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$について，以下の問いに答えよ．ただし，$n$を正の整数，$A^1=A$とする．

(1) 等式 $A(A-E)=A-E$ が成り立つことを示せ．

(2) $A^{n+1}-A^n$ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．

(1) $A(A-E)=A^2-A$

$=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

一方，

$A-E=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $A(A-E)=A-E$ が成り立つ ☒

(2)

$A^{n+1}-A^n=A^n(A-E)$

$=A^{n-1}\cdot A(A-E)$

$=A^{n-1}(A-E)$ （∵(1)より）

$\vdots$

$=A(A-E)$

$=A-E$

$\therefore$ $\underline{A^{n+1}-A^n=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$ //

(3) (2)より

$A^n-A^{n-1}=A-E$

$A^{n-1}-A^{n-2}=A-E$

$\vdots$

$+)\ A^2-A=A-E$

すべて加えると．

$A^n-A=(n-1)A-(n-1)E$

$\therefore$ $A^n=nA-(n-1)E$

$\underline{A^n=\begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{pmatrix}}$ //