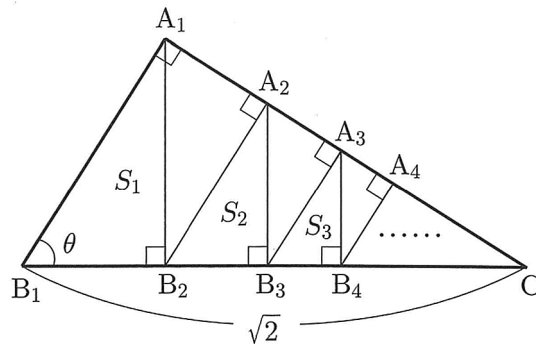




2014年工学部第4問

4 $\triangle A_1B_1C$ は, $B_1C = \sqrt{2}$, $\angle B_1A_1C = \frac{\pi}{2}$, $\angle A_1B_1C = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を満たす. 下図のように, 点 A_1 から辺 B_1C に下ろした垂線を A_1B_2 とし, 点 B_2 から辺 A_1C に下ろした垂線を B_2A_2 とする. 次に, 点 A_2 から辺 B_1C に下ろした垂線を A_2B_3 とし, 点 B_3 から辺 A_1C に下ろした垂線を B_3A_3 とする. この操作を繰り返し, 辺 A_1C 上に点 A_2, A_3, A_4, \dots を, 辺 B_1C 上に点 B_2, B_3, B_4, \dots を定める. 自然数 n に対し, $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ の面積を S_n とし, これらの面積の総和を $T = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.



- (1) $S_1 = \sin \theta \cos^3 \theta$, $S_2 = \sin^5 \theta \cos^3 \theta$ を示し, 一般項 S_n を求めよ.
- (2) $T = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}$ を示せ.
- (3) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, T の最大値を求めよ.