

2016年第1問

 数理
石井K

1 次の問いに答えよ.

(1) $\log_4 a^2 - 3 = 4 \log_a 2$ を満たす正の実数 a をすべて求めよ.(2) $27^{9x} = \frac{3}{9^{4y}}$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ.(1) 真数と底に関する条件より, $a > 0$ かつ $a \neq 1 \dots \textcircled{1}$

$$\text{このとき, } 2 \log_4 a - 3 = 4 \cdot \frac{\log_4 2}{\log_4 a}$$

$$\therefore 2(\log_4 a)^2 - 3 \log_4 a - 2 = 0$$

$$(2 \log_4 a + 1)(\log_4 a - 2) = 0$$

$$\therefore \log_4 a = -\frac{1}{2}, 2$$

$$\therefore a = 4^{-\frac{1}{2}}, 4^2$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, 16 \quad \text{これは } \textcircled{1} \text{ をみたしている.}$$

$$(2) (3^3)^{9x} = \frac{3}{(3^2)^{4y}}$$

$$\therefore 3^{27x} = 3 \cdot 3^{-8y}$$

$$\therefore 3^{27x} = 3^{1-8y}$$

$$\therefore 27x = 1 - 8y$$

$$27x + 8y = 1 \dots \textcircled{2}$$

②をみたす x, y の1つは, $x = 3, y = -10$ なので

$$27 \cdot 3 + 8 \cdot (-10) = 1 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より, } 27(x-3) + 8(y+10) = 0$$

$$\therefore 27(x-3) = -8(y+10)$$

27と8は互いに素なので $x-3 = 8k$ と表せる (k は整数) このとき, $y = -27k - 10$

$$\therefore (x, y) = (8k+3, -27k-10) \quad (k \text{ は任意の整数})$$

逆にこのとき, ②は成り立っている.