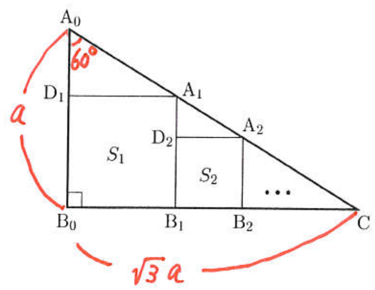
2011 年 工学部 第1問　1枚目 /2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 三角形 A_0B_0C は辺 A_0B_0 の長さが a，$\angle A_0 = 60°$，$\angle B_0 = 90°$ の直角三角形であり，三角形 $A_0'B_0'C'$ は辺 $A_0'B_0'$ の長さが a，$\angle A_0' = 45°$，$\angle B_0' = 90°$ の直角三角形である．右図に示すように三角形 A_0B_0C の3つの辺上にそれぞれ点 D_1，A_1，B_1 をとり，正方形 $B_0D_1A_1B_1$ を作る．次に，三角形 A_1B_1C の3つの辺上に点 D_2，A_2，B_2 をとり，正方形 $B_1D_2A_2B_2$ を作る．これを繰り返し，正方形 $B_{j-1}D_jA_jB_j$ を作る．その正方形の面積を S_j とおく．ただし，$j = 1, 2, \cdots$ である．同様な操作で，三角形 $A_0'B_0'C'$ にも正方形 $B_{j-1}'D_j'A_j'B_j'$ を作り，その正方形の面積を S_j' とおく．これらの図形について以下の問いに答えよ．



(1) S_1 を a を用いた式で示せ．

(2) S_j を a と j を用いた式で示せ．

(3) 三角形 A_0B_0C 内に正方形を描くことを無限に繰り返すとき，正方形の面積の総和 S_T が三角形 A_0B_0C の面積 S_0 に占める割合を求めよ．

(4) $c_j = \dfrac{S_{j+2}}{S_j'}$ で定義される一般項 c_j を持つ無限級数は，収束するか発散するかを，根拠を式で示した上で答えよ．

(1) $\triangle A_0B_0C \backsim \triangle A_1B_1C$ より．$B_0B_1 = x$ とおくと．

$$\sqrt{3}a : a = \sqrt{3}a - x : x \qquad \therefore \sqrt{3}ax = \sqrt{3}a^2 - ax$$

$$\therefore x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}a, \quad S_1 = x^2 = \underline{\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})a^2} //$$

(2) S_n と S_{n+1} の面積比は $S_n : S_{n+1} = a^2 : \frac{3}{2}(2-\sqrt{3})a^2 = 1 : \frac{3}{2}(2-\sqrt{3})$

$\therefore \{S_n\}$ は初項 $\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})a^2$，公比 $\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})$ の等比数列

$$\therefore \underline{S_j = \left\{\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\right\}^j \cdot a^2} //$$

(3) 公比は $0 < \frac{3}{2}(2-\sqrt{3}) < 1$ であるから $\underset{S_T}{\overset{}{\sum_{j=1}^{\infty}}} S_j = \dfrac{\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})}{1-\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})}a^2$

$$\therefore S_T = \frac{3(2-\sqrt{3})}{3\sqrt{3}-4}a^2 = \frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}a^2 \qquad \therefore \frac{S_T}{S_0} = \underline{\frac{2(6-\sqrt{3})}{11}} //$$

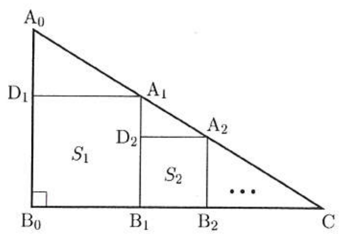
0001411368858999

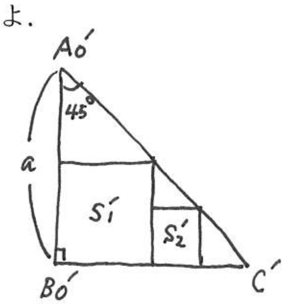
豊橋技術科学大学

2011 年 工学部 第 1 問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 三角形 $\mathrm{A_0B_0C}$ は辺 $\mathrm{A_0B_0}$ の長さが a，$\angle \mathrm{A_0} = 60°$，$\angle \mathrm{B_0} = 90°$ の直角三角形であり，三角形 $\mathrm{A_0'B_0'C'}$ は辺 $\mathrm{A_0'B_0'}$ の長さが a，$\angle \mathrm{A_0'} = 45°$，$\angle \mathrm{B_0'} = 90°$ の直角三角形である．右図に示すように三角形 $\mathrm{A_0B_0C}$ の 3 つの辺上にそれぞれ点 $\mathrm{D_1}$，$\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$ をとり，正方形 $\mathrm{B_0D_1A_1B_1}$ を作る．次に，三角形 $\mathrm{A_1B_1C}$ の 3 つの辺上に点 $\mathrm{D_2}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$ をとり，正方形 $\mathrm{B_1D_2A_2B_2}$ を作る．これを繰り返し，正方形 $\mathrm{B}_{j-1}\mathrm{D}_j\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ を作る．その正方形の面積を S_j とおく．ただし，$j = 1, 2, \cdots$ である．同様な操作で，三角形 $\mathrm{A_0'B_0'C'}$ にも正方形 $\mathrm{B}_{j-1}'\mathrm{D}_j'\mathrm{A}_j'\mathrm{B}_j'$ を作り，その正方形の面積を S_j' とおく．これらの図形について以下の問いに答えよ．





(1) S_1 を a を用いた式で示せ．

(2) S_j を a と j を用いた式で示せ．

(3) 三角形 $\mathrm{A_0B_0C}$ 内に正方形を描くことを無限に繰り返すとき，正方形の面積の総和 S_T が三角形 $\mathrm{A_0B_0C}$ の面積 S_0 に占める割合を求めよ．

(4) $c_j = \dfrac{S_{j+2}}{S_j'}$ で定義される一般項 c_j を持つ無限級数は，収束するか発散するかを，根拠を式で示した上で答えよ．

(4) (2)と同様にして，$\{S_n'\}$ は初項 $\frac{a^2}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列なので

$$S_j' = \left(\frac{1}{4}\right)^j \cdot a^2 \qquad \therefore \frac{S_{j+2}}{S_j'} = \frac{\left\{\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\right\}^{j+2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^j} = \left(\frac{63}{4} - 9\sqrt{3}\right)\cdot\left(12 - 6\sqrt{3}\right)^j$$

$\therefore \left\{\dfrac{S_{j+2}}{S_j'}\right\}$ は初項 $\frac{63}{4} - 9\sqrt{3}$，公比 $12 - 6\sqrt{3}\ (>1)$ の等比数列

なので，その無限級数は発散する．//