

2010年第3問

3 関数列

$$f_n(x) = x^{n-1}, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

について、次の各問に答えよ。

(1) $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ を求めよ。

(2) $\{g_n(x)\}$ が数列として収束するための実数 x の条件を求めよ。また、 x がこの条件を満たすとき $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ とおく。

$$\int_0^x g(t) dt$$

を求めよ。

(3) (1) の $F_n(x)$ について

$$-F_{n+1}(1) \leq \int_0^1 \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} dt \leq F_{n+1}(1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) 無限級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

の収束、発散について調べ、収束すればその和を求めよ。