

2013年 数学科・物理学科（共通問題）第9問

9 放物線  $y = x^2$  を  $C_1$ ,  $C_1$  と異なる放物線  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) を  $C_2$  とする.

(1)  $a = 1$  のとき,  $C_1$  と  $C_2$  の両方に接する直線は最大でも 1 本しか存在しないことを示せ.

(2)  $a = 1$  のとき, 条件  $b \neq 0$  は条件

$C_1$  と  $C_2$  の両方に接する直線が 1 本だけ存在する

の必要十分条件であることを示せ.

(3) 条件  $p_1, p_2, q_1, q_2$  を次で定める.

$p_1$ :  $C_2$  は下に凸である.

$p_2$ :  $C_2$  は上に凸である.

$q_1$ :  $C_1$  と  $C_2$  が異なる 2 点で交わる.  $q_2$ :  $C_1$  と  $C_2$  が交わらない.

$a \neq 1$  のとき, 条件

$p$ : 「 $p_1$  かつ  $q_1$ 」 または 「 $p_2$  かつ  $q_2$ 」

は条件

$q$ :  $C_1$  と  $C_2$  の両方に接する直線が 2 本存在する

の必要十分条件であることを示せ.