



2014年 総合理工（数理・情報システム）第4問

4  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とおく.  $x$  を実数とし, 行列

$$X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$$

を定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 自然数  $n$  に対して  $X$  の  $n$  乗を  $X^n = \begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ R_n(x) & S_n(x) \end{pmatrix}$  とおく. このとき, すべての  $n$  に対して,  $x = \frac{1}{2}$  のとき,  $Q_n(x) = 0$  であることを示せ. また, すべての  $n$  に対して,  $x = \frac{2}{3}$  のとき,  $R_n(x) = 0$  であることを示せ.
- (2)  $a$  と  $b$  は定数とする. このとき,  $X^2 + aX + bE = O$  をみたす実数  $x$  が存在するための  $a, b$  の条件を求めよ.
- (3)  $X^3 = O$  をみたす実数  $x$  は存在しないことを証明せよ.